

■ ■ ■ ΣΧΟΛΗ
■ ■ ■ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΩΝ
■ ■ ■ ΕΦΑΡΜΟΓΩΝ

Τμήμα: ΕΝΕΡΓΕΙΑΚΗΣ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ

Πτυχιακή Εργασία

Μοντελοποίηση και προσομοίωση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων κατά την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης σε διατάξεις ασύμμετρων ηλεκτροδίων.

ΣΙΜΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

A.M.:3109

Επιβλέπων : Δρ. Αντώνιος Ξ. Μορώνης

Αθήνα, 15-10-2012

Περίληψη :

Σε αυτή την εργασία μελετήθηκε η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου και των δυναμικών γραμμών σε διατάξεις ασύμμετρων ηλεκτροδίων κατά την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης, οι οποίες βρίσκουν διάφορες εφαρμογές όπως : ηλεκτροστατικά φίλτρα, ψύξη ηλεκτρονικού εξοπλισμού, προωθητικά συστήματα. Για το λόγο αυτό έγινε αναδρομή σε βιβλιογραφία που αφορά την κατανομή και τη διαμόρφωση των δυναμικών γραμμών. Ακόμα μελετήθηκε η επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών στη διαμόρφωση των δυναμικών γραμμών σε διάφορες διατάξεις ασύμμετρων ηλεκτροδίων, μέσω προγράμματος προσομοίωσης, το οποίο βασίζεται στην μέθοδο ανάλυσης με χρήση πεπερασμένων στοιχείων. Από τα δεδομένα που προέκυψαν υπολογίστηκαν η μέγιστη και η ελάχιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου για διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας των ηλεκτροδίων , καθώς και για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ τους. Με την χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έγινε προσομοίωση της τροχιάς που ακολουθούν τα σωματίδια του αέρα κατά το φαινόμενο του ιονισμού υπό την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης. Τέλος έγινε αντιπαραβολή των αριθμητικών αποτελεσμάτων της προσομοίωσης με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

Abstract :

In this project the distribution of the electric field and the lines of force in asymmetric electrode arrangements when applying a D.C high voltage was studied. For this purpose a bibliographic survey about the distribution and shaping of the lines of force was done. In order to study the influence of the geometrical characteristics of the electrodes in shaping of the lines of force , a simulation program which is based to the finite element method analysis was used. From the simulation data that occurred, calculation of the maximum and the minimum value of the electric field was done for different radii of the electrodes and for different spaces between them. With the use of the finite element method analysis, the trajectories of the air particles was simulated, during the effect of ionization , when applying a D.C high voltage. Finally a comparison of numerical results from the simulation with experimental was done .

Περιεχόμενα

Εισαγωγή	4
Κεφάλαιο 1 : Το ηλεκτρικό πεδίο.	6
1.1 Ο νόμος του Coulomb.	6
1.2 Η ροή ενέργειας και οι δυναμικές γραμμές σε αγωγούς	8
1.3 Ηλεκτρικές καταπονήσεις, διάσπαση μονωτικών υλικών.	10
1.4 Φαινόμενο Corona και ιονισμός.	11
1.5 Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και κατανομή του δυναμικού	13
Κεφάλαιο 2 : Τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης.	15
2.1 Αριθμητικές μέθοδοι ανάλυσης.	15
2.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ)	17
2.3 Ιστορική αναδρομή της (Μ.Π.Σ)	19
2.4 Βασική αρχή λειτουργίας της Μ.Π.Σ	22
Κεφάλαιο 3 : Εφαρμογή της Μ.Π.Σ.	37
3.1 Γεωμετρικό μοντέλο.	37
3.2 Ρυθμίσεις λογισμικού.	38
3.3 Διάταξη προσομοίωσης	47
Κεφάλαιο 4 : Αποτελέσματα	49
4.1 Δεδομένα γεωμετρικού μοντέλου.	49
4.2 Έλεγχος του εφαρμοζόμενου μοντέλου ανάλυσης σε γνωστές γεωμετρίες	50
4.3 Αποτελέσματα κατανομής πεδίου σε διάταξη σύρμα-κύλινδρος	51
4.4 Προσομοίωση δυναμικών γραμμών και τροχιών σωματιδίων.	54
Κεφάλαιο 5 : Επεξεργασία αποτελεσμάτων.	61
5.1 Υπολογισμός μήκους τροχιάς σωματιδίου.	61
5.2 Ανάλυση των τροχιών σωματιδίων.	63
5.3 Κατανομή πυκνότητας ρεύματος.	65
5.3.1 Υπολογισμός πυκνότητας ρεύματος J.	66
5.4 Υπολογισμός ρεύματος εκφόρτησης των ηλεκτροδίων.	68
5.5 Σύγκριση ρεύματος ηλεκτροδίων / με πειραματικά δεδομένα.	71
Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις	73
Αναφορές	75

Εισαγωγή :

Η μελέτη της επίδρασης του φαινομένου του ιονισμού σε διατάξεις συμμετρικών ηλεκτροδίων όπως : σφαίρας-σφαίρας , σύρμα-σύρμα , κύλινδρος-κύλινδρος, κατά την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης ,αποτελεί εδώ και πολλές δεκαετίες πηγή μελέτης και έρευνας . Από τις αρχές ακόμα του 20^{ου} αιώνα έχουν διατυπωθεί θεωρίες και έχουν γίνει πειράματα, με σκοπό να αναλύσουν το φαινόμενο.(John.S Townsend 1910,. Peek F.W 1915). Ακόμα όμως και τώρα, στις αρχές του 21^{ου} αιώνα , έχει γίνει πολύ λίγη έρευνα του φαινομένου του ιονισμού σε διατάξεις ασύμμετρων ηλεκτροδίων όπως σύρμα-κύλινδρος. Τα τελευταία χρόνια έχει αρχίσει να παρατηρείται ένα έντονο ενδιαφέρον για έρευνα και ανάπτυξη του φαινομένου του ιονισμού και των αποτελεσμάτων του (όπως ο ιοντικός άνεμος) , σε διάφορες εφαρμογές ηλεκτροστατικής φύσης (Moore A.D 1973) όπως : προωθητικά συστήματα αεροσκαφών (Martins A.A, Pinheiro M.J. 2011, Cravens D.J, 1990) , έλεγχος της ατμοσφαιρικής ρύπανσης με χρήση ηλεκτροστατικών φίλτρων (Schmid H.J, Stolz S, Buggisch H, 2002) , ψύξη ηλεκτρονικών διατάξεων όπως chip (Velkoff H.R, Kulacki F.A, 1977), ενώ ακόμα και εφαρμογές στην γεωργία έχουν αρχίσει να αναπτύσσονται (Lynikiene S. Carrot, 2001).

Λόγω της ραγδαίας αύξησης της ζήτησης σε ηλεκτρική ενέργεια με τη πάροδο των χρόνων, είναι αναγκαίος ο σχεδιασμός συστημάτων μεταφοράς τα οποία να είναι ανθεκτικά στις ηλεκτρικές καταπονήσεις, που προέρχονται από το φαινόμενο του ιονισμού, και ηλεκτρικές μονώσεις οι οποίες να μην διασπώνται εύκολα κατά την εφαρμογή υψηλής τάσης. Τα προβλήματα που σχετίζονται με την διάσπαση των ηλεκτρικών μονώσεων είναι κυρίως ηλεκτροστατικής φύσης. (Kuffel E. , Zaengl W.S , Kuffel J. , 2000)

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να μελετηθεί η επίδραση των γεωμετρικών χαρακτηριστικών στην κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου για την διάταξη ασύμμετρων ηλεκτροδίων σύρμα κύλινδρος κατά την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης η οποία δεν έχει διερευνηθεί επαρκώς στη βιβλιογραφία. Στο κεφάλαιο 1

γίνεται αναφορά στο ηλεκτρικό πεδίο , σε βασικές σχέσεις όπως ο νόμος του Coulomb, στις ηλεκτρικές καταπονήσεις , στο φαινόμενο Corona και τον ιονισμό και στην κατανομή και ένταση του ηλεκτρικού πεδίου. Στο κεφάλαιο 2 γίνεται παρουσίαση των τεχνικών αριθμητικής ανάλυσης, όπως η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, η ιστορική αναδρομή της και βασική αρχή λειτουργίας της. Τα κεφάλαια 3 και 4 αναφέρονται στην μοντελοποίηση και προσομοίωση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου για διάφορες διατάξεις ηλεκτροδίων με την χρήση προγράμματος προσομοίωσης. Συγκεκριμένα στο κεφάλαιο 3 περιγράφονται τα βασικά στάδια εφαρμογής της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για μοντελοποίηση των διατάξεων, καθώς και των απαραίτητων ρυθμίσεων που πρέπει να γίνουν, ενώ στο κεφάλαιο 4 παρουσιάζονται τα αποτελέσματα της , όπως η απεικόνιση του ηλεκτρικού πεδίου και των δυναμικών σε διατάξεις ηλεκτροδίων σύρμα –σύρμα , κύλινδρος –κύλινδρος , σύρμα –κύλινδρος. Τέλος στο κεφάλαιο 5 γίνεται επεξεργασία των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης και υπολογίζεται το μήκος των δυναμικών γραμμών, η πυκνότητα ρεύματος και το συνολικό ρεύμα των ηλεκτροδίων. Ακόμα γίνεται αντιπαραβολή και σύγκριση των θεωρητικών τιμών της προσομοίωσης με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα.

Κεφάλαιο 1 : Το ηλεκτρικό πεδίο.

1.1 Ο νόμος του Coulomb.

Η αιτία δημιουργίας του ηλεκτρικού πεδίου είναι τα ηλεκτρικά φορτία, τα οποία είναι δύο ειδών ανάλογα με την φόρτιση τους :

1. Θετικά (+)
2. Αρνητικά (-)

Όταν δύο ή περισσότερα ηλεκτρικά φορτία (Q) βρεθούν κοντά το ένα στο άλλο τότε αρχίζουν να αλληλεπιδρούν μεταξύ τους , με αποτέλεσμα στα ίδιας φόρτισης να υπάρχει απώθηση , ενώ στα αντίθετης να υπάρχει έλξη μεταξύ τους. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα να αναπτύσσεται μία δύναμη μεταξύ των δύο φορτίων, χωρίς να είναι τα φορτία σε φυσική επαφή μεταξύ τους , αλλά σε απόσταση, η οποία τελικά να έλκει ή να απωθεί άλλα φορτία και ονομάζεται δύναμη πεδίου (F). Η δύναμη του πεδίου είναι ανάλογη του γινομένου των δύο φορτίων και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ τους και ονομάζεται νόμος του Coulomb. (Ron Schmitt, 2002):

$$F = k \frac{Q_1 Q_2}{R^2} \quad [\text{N}] \quad (1.1)$$

Όπου :

Q_1, Q_2 : τα φορτία που αλληλεπιδρούν μεταξύ τους.

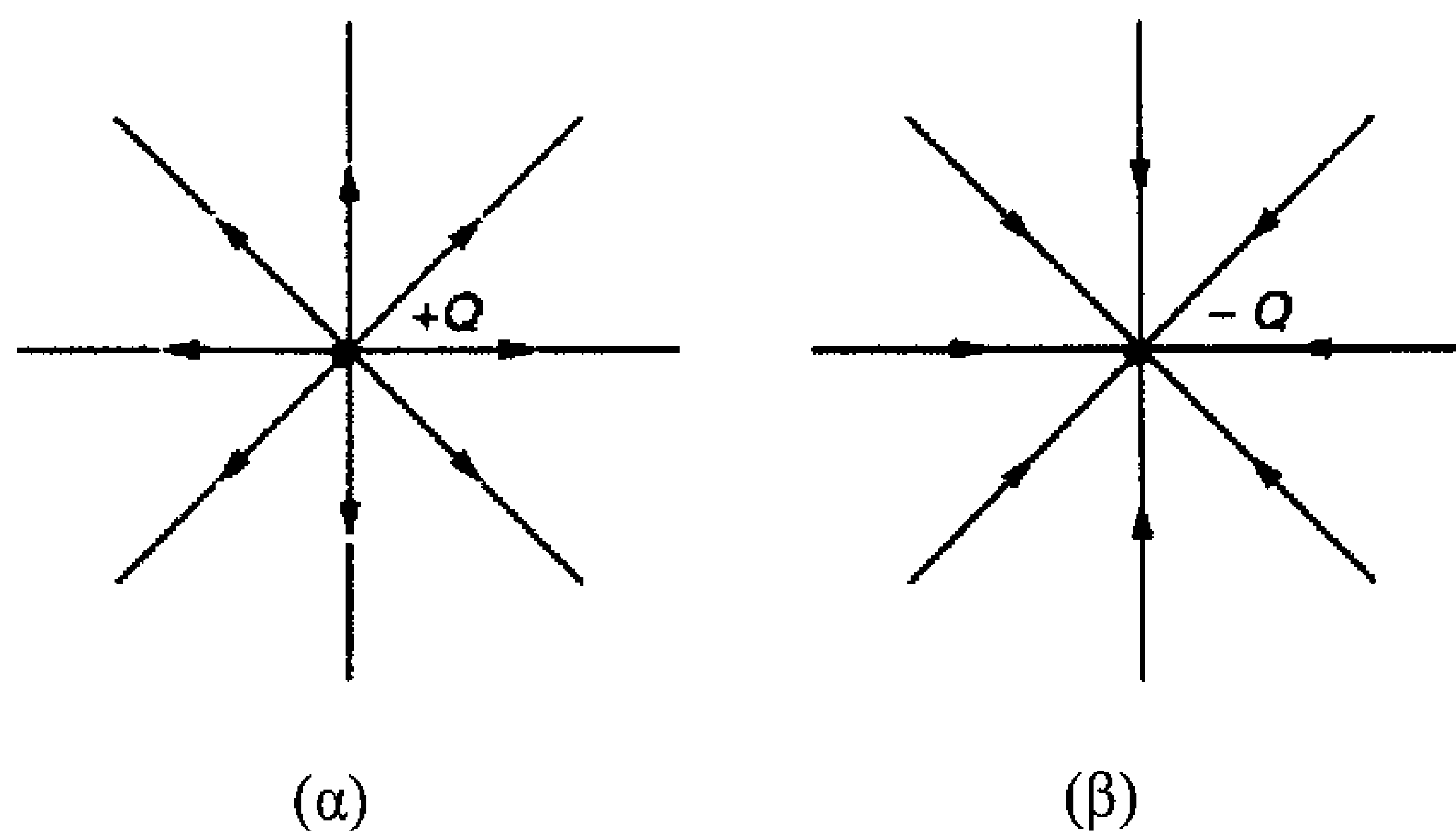
R : η απόσταση μεταξύ των φορτίων.

Η σταθερά k ισούται με $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ όπου ϵ_0 είναι η ηλεκτρική αγωγιμότητα του αέρα και είναι ίση με : $8.854 \times 10^{-12} \text{ [C}^2/\text{N} \cdot \text{m}^2\text{]}$.

Συνεπώς η σχέση (1.1) που εκφράζει το νόμο του Coulomb μπορεί να γραφτεί ως εξής :

$$F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad [\text{N}] \quad (1.2)$$

Για την απεικόνιση των δυνάμεων που αναπτύσσονται μεταξύ των φορτίων χρησιμοποιούμε τις λεγόμενες δυναμικές γραμμές, οι οποίες ανάλογα με το είδος του φορτίου έχουν την παρακάτω μορφή :



Εικόνα 1.1 : Απεικόνιση των δυναμικών γραμμών α) για θετικό φορτίο β) για αρνητικό φορτίο.

Έστω ένα φορτίο Q_1 τοποθετημένο σε μία σταθερή θέση α και ένα δεύτερο φορτίο Q_2 σε μία σταθερή απόσταση R το οποίο κινείται αργά γύρω από αυτό, τότε σε κάθε σημείο του δεύτερου φορτίου παρατηρείται η ύπαρξη μίας δύναμης F_{Q_2} η οποία σχετίζεται άμεσα με το πρώτο φορτίο και περιγράφεται από το νόμο του Coulomb και καλείται δυναμικό πεδίο. (Hayt W., Buck J., 2010) :

$$F_{Q_2} = k \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad [\text{N}] \quad (1.3)$$

Γράφοντας την δύναμη F_{Q_2} σαν δύναμη ανά μονάδα φορτίου δίνεται ένα νέο μέγεθος το οποίο ονομάζεται ένταση του ηλεκτρικού πεδίου που προκύπτει από το φορτίο Q_1 και περιγράφεται από την παρακάτω σχέση :

$$E_I = \frac{F_{Q_2}}{Q_2} = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \quad [\text{N/m}] \quad (1.4)$$

Η οποία τελικά στη γενική της μορφή (στο S.I) γράφεται ως εξής :

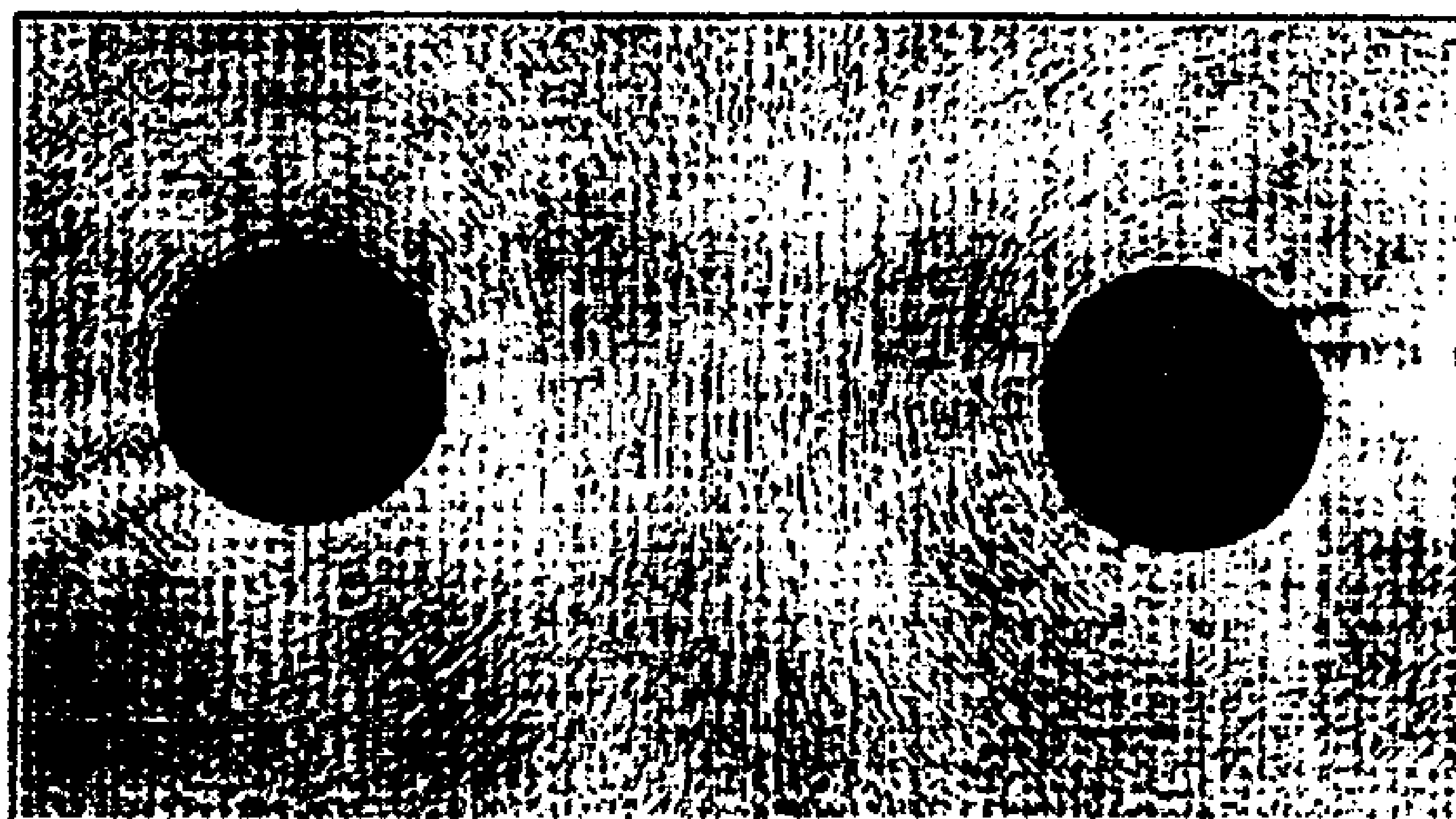
$$E = \frac{F}{Q} = \frac{V}{d} \quad [\text{V/m}] \quad (1.5)$$

1.2 Η ροή ενέργειας και οι δυναμικές γραμμές σε αγωγούς .

Κατά την μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας με αγωγούς υπάρχουν δύο μορφές ροής της ενέργειας , η ηλεκτρομαγνητική και η ηλεκτροστατική και προκειμένου να υπάρξει ροή αυτής πρέπει ένα τμήμα της πρέπει να αποθηκευτεί γύρω από τον αγωγό . Η αποθήκευση αυτή γίνεται αντίστοιχα με δύο τρόπους:

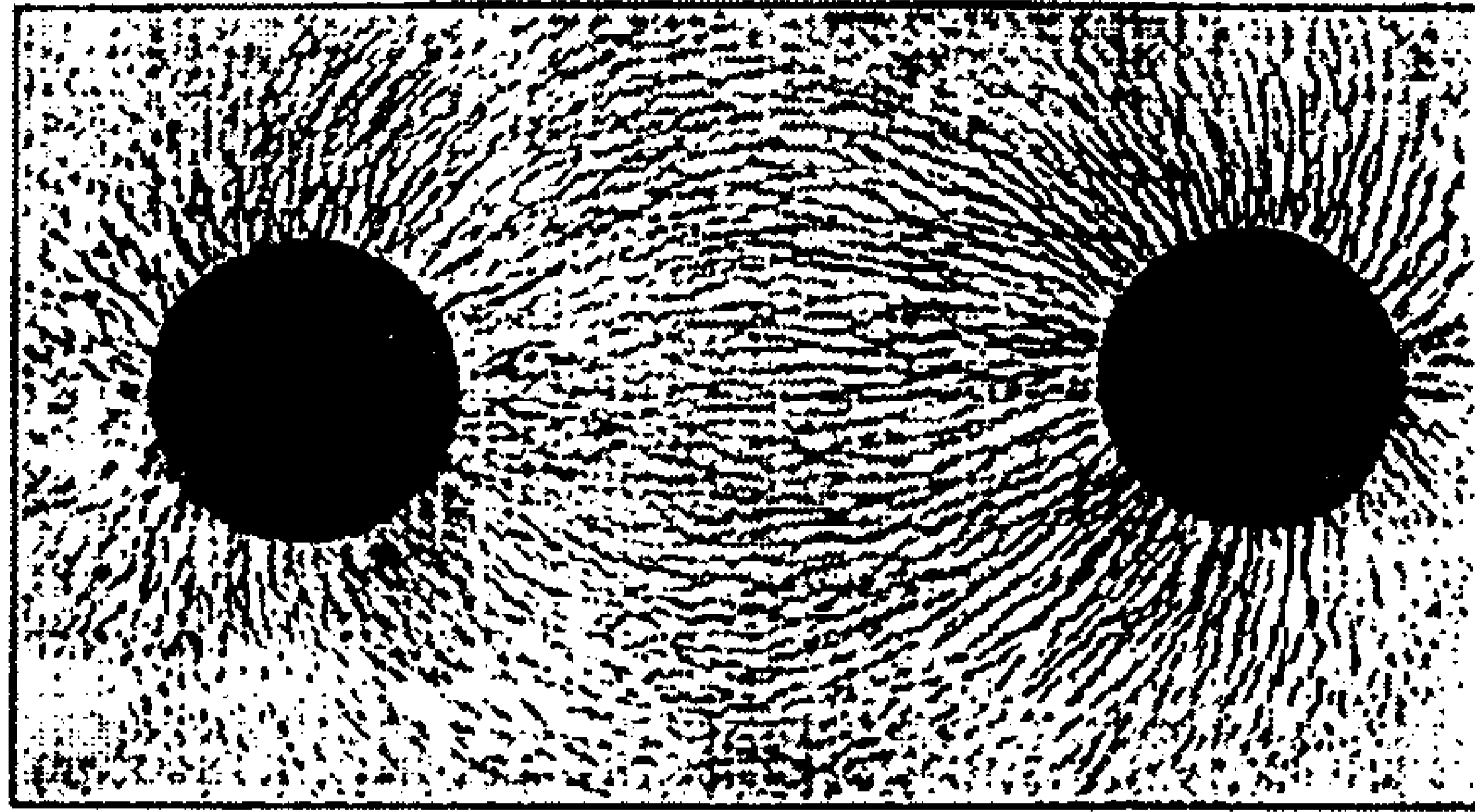
- Ηλεκτρομαγνητικά
- Ηλεκτροστατικά

Η ροή ηλεκτρομαγνητικής ενέργειας προκύπτει από την επίδραση διαφόρων καταπονήσεων, για παράδειγμα η απωθητική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο παράλληλων αγωγών κατά την μεταφορά ηλεκτρικής ενέργειας. Εάν οι αγωγοί τοποθετηθούν σε ένα πλαίσιο με μονωτικό υλικό και καλυφθούν με ρινίσματα σιδήρου, τότε θα σχηματιστούν έκκεντροι κύκλοι γύρω τους, οι οποίοι απεικονίζουν της μαγνητικές γραμμές η αλλιώς το μαγνητικό πεδίο. Απαραίτητη προϋπόθεση για την δημιουργία του μαγνητικού πεδίου και των μαγνητικών γραμμών είναι να υπάρχει ροή ενέργειας κατά μήκος των αγωγών. (Peek F.W , 1915)



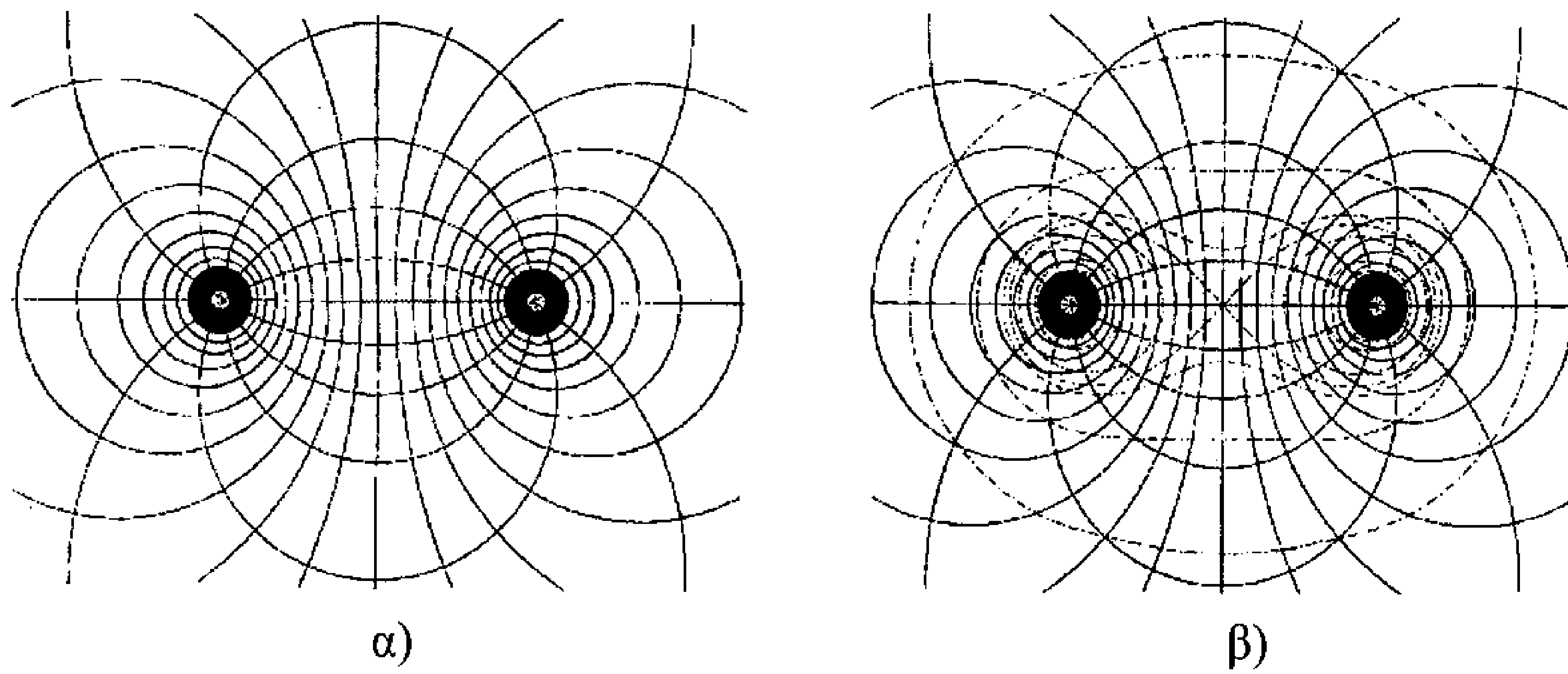
Εικόνα 1.2 : Απεικόνιση των μαγνητικών δυναμικών γραμμών μεταξύ δύο αγωγών που μεταφέρουν ενέργεια με χρήση ρινισμάτων σιδήρου, πηγή : Peek F.W , 1915

Εάν τώρα εφαρμοστεί δυναμικό μεταξύ των αγωγών, αλλά με τις άκρες τους ανοιχτοκυκλωμένες θα προκύψει το ηλεκτρικό πεδίο καθώς θα υπάρχει αποθήκευση της ενέργειας ηλεκτροστατικά. Αν οι αγωγοί τοποθετηθούν μέσα σε ένα μονωτικό πλαίσιο όπως και πριν, και καλυφθούν με ένα διηλεκτρικό μέσο σε σκόνη, όπως σκόνη μαρμαρυγίας (Mica), η σκόνη θα έχει την τάση να σχηματίσει τόξα κύκλων τα οποία θα ξεκινούν από τον έναν αγωγό και θα καταλήγουν στον άλλο.



Εικόνα 1.3: Απεικόνιση των ηλεκτρικών δυναμικών γραμμών με χρήση σκόνη μαρμαρυγίας (Mica), πηγή : Peek F.W, 1915

Η δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ των δύο αγωγών είναι συνάρτηση του γινομένου του ηλεκτροστατικού και του μαγνητικού πεδίου καθώς και της γωνίας μεταξύ τους. Για να υπάρξει ροή ενέργειας θα πρέπει και τα δύο πεδία να συνυπάρχουν, ενώ στην περίπτωση που υπάρχει μόνο του το ηλεκτρικό πεδίο τότε χαρακτηρίζεται ως στατικό. Επομένως μιλάμε μόνο για ύπαρξη ηλεκτροστατικού πεδίου. Λόγω του ηλεκτρικού πεδίου, τα σημεία στο χώρο που περιβάλλουν τους αγωγούς έχουν συγκεκριμένα δυναμικά, έτσι εάν τα σημεία ενός συγκεκριμένου δυναμικού συνδεθούν μεταξύ τους, θα διαμορφωθεί μια κυλινδρική επιφάνεια γύρω από κάθε αγωγό η οποία ονομάζεται ισοδυναμική επιφάνεια. Οι ισοδυναμικές επιφάνειες σχεδιάζονται έτσι ώστε το ένα εικοστό του συνολικό δυναμικού να είναι μεταξύ δύο επιφανειών, ενώ οι δυναμικές γραμμές του πεδίου καθώς και οι ισοδυναμικές επιφάνειες σχηματίζουν ορθές γωνίες στα σημεία τομής τους. Οι δυναμικές γραμμές αναχωρούν πάντα σε ορθή γωνία από την επιφάνεια του αγωγού, και οι ισοδυναμικές γραμμές είναι κύκλοι που έχουν τα κέντρα τους πάνω στη νοητή γραμμή που διέρχεται από τα κέντρα των δύο αγωγών. (Peek F.W, 1915)



Εικόνα 1.4: Απεικόνιση **α)** των δυναμικών γραμμών και των ισοδυναμικών επιφανειών **β)** των δυναμικών γραμμών , των ισοδυναμικών επιφανειών και των ισό-gradient επιφανειών μεταξύ δύο παράλληλων αγωγών που μεταφέρουν ηλεκτρική ενέργεια , πηγή: Peek F.W , 1915

1.3 Ηλεκτρικές καταπονήσεις, διάσπαση μονωτικών υλικών.

Λόγω του ότι οι τάσεις λειτουργίας στις γραμμές μεταφοράς ηλεκτρικής ενέργειας είναι πολύ υψηλές (από μερικές δεκάδες έως αρκετές εκατοντάδες χιλιάδες volts), είναι αναγκαίο να γίνεται υπολογισμός της αντοχής των ηλεκτρικών μονώσεων και των επιτρεπτών εντάσεων των ηλεκτροστατικών πεδίων ώστε να αποφεύγονται φαινόμενα διάσπασης των μονωτικών υλικών.

Προκειμένου να είναι μια τάση V μεταξύ δύο ηλεκτροδίων επαρκώς μονωμένη θα πρέπει να τοποθετηθεί μεταξύ τους ένα ομογενές μονωτικό υλικό πεδιακής έντασης διάσπασης E_b . Η τιμή της πεδιακής έντασης E_b θεωρείται ως μια χαρακτηριστική σταθερά του μονωτικού υλικού. Τα δύο ηλεκτρόδια θα πρέπει να απέχουν μεταξύ τους κατά μία απόσταση d η οποία καθορίζεται από τον λόγο V/ E_b . Παρά το ότι τα ηλεκτρόδια είναι συνήθως καλά μονωμένα και οριοθετημένα θα πρέπει κατά το σχεδιασμό της ηλεκτρικής μόνωσης να ληφθεί υπόψη ότι μόνο ένα μικρό τμήμα του μονωτικού υλικού καταπονείται σε μια καθορισμένη μέγιστη πεδιακή ένταση E_{max} . Επομένως θα πρέπει να υπολογιστεί με ακρίβεια η τιμή και το σημείο της μέγιστης πεδιακής έντασης E_{max} . Για το λόγο όμως ότι η τιμή της πεδιακής έντασης διάσπασης E_b για κάποια υλικά έχει υπολογιστεί προσεγγιστικά , όπως στα περισσότερα στερεά και υγρά διηλεκτρικά , είναι απαραίτητο να γίνει μία

αναλυτική και με μεγάλη ακρίβεια προσέγγιση της τιμής E_b . (Kuffel E. , Zaengl W.S, J.Kuffel ,2000)

Σύμφωνα με τον Schwaiger. A. (1922) σε διάταξη ηλεκτροδίων ράβδου επιπέδου μονωμένων από ατμοσφαιρικό αέρα σε ατμοσφαιρική πίεση, ορίζεται ένας συντελεστής n “συντελεστής απόδοσης πεδίου” ο οποίος εκφράζεται από το λόγο της μέσης τιμής της πεδιακής έντασης E_{mean} προς την μέγιστη τιμή του ηλεκτρικού πεδίου E_{max} , δηλαδή :

$$n = \frac{E_{mean}}{E_{max}} \quad (1.6)$$

Η τιμή της μέσης πεδιακής έντασης E_{mean} προσδιορίζεται από τον λόγο της εφαρμοζόμενης τάσης στα ηλεκτρόδια προς την ελάχιστη απόσταση d των ηλεκτροδίων (η άκρη της ράβδου), δηλαδή $E_{mean} = V/d$.

1.4 Φαινόμενο Corona και ιονισμός.

Σε συνθήκες κανονικής θερμοκρασίας τα αέρια λειτουργούν σαν πολύ καλοί μονωτές , με την αγωγή στον αέρα σε χαμηλό πεδίο να αποκτά την τιμή $10^{-16} - 10^{-17} \text{ A/cm}^2$. Συγκεκριμένα αυτό το ρεύμα σχετίζεται με ολόκληρο το ρεύμα που ρέει σε ολόκληρη την επιφάνεια της γης (λόγω του φυσικού ηλεκτρικού πεδίου) και είναι περίπου 1000-1200 A. με δεδομένο ότι η επιφάνεια της γης είναι περίπου $5 \cdot 10^{19} \text{ cm}^2$ υπολογίζουμε ότι :

$$j = \frac{I}{\text{επιφάνεια}} = \frac{1000}{5 \cdot 10^{19}} = 0.2 \cdot 10^{-16} \text{ A/cm}^2 \quad (1.7)$$

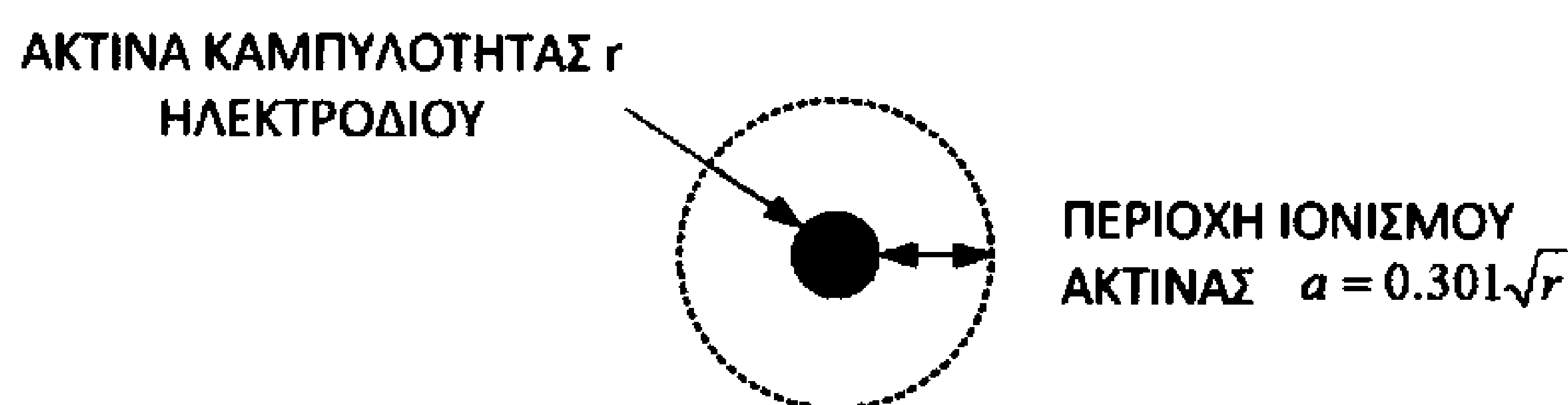
Η πηγή προέλευσης του παραπάνω ρεύματος είναι η κοσμική ακτινοβολία και οι ραδιενεργές ουσίες που βρίσκονται στην γη και την ατμόσφαιρα.

Σε μεγάλες τιμές του πεδίου τα φορτισμένα σωματίδια του διηλεκτρικού μέσου μπορούν να αποκτήσουν αρκετή ενέργεια ώστε να προκαλέσουν ιονισμό από κρούσεις με άλλα ουδέτερα μόρια. Ο ιονισμός από κρούσεις των ηλεκτρονίων είναι για τα υψηλότερης έντασης πεδία η πιο σημαντική διαδικασία η οποία οδηγεί σε διάσπαση αερίων και εξαρτάται από την ενέργεια που μπορεί ένα ηλεκτρόνιο να αποκτήσει κατά μήκος ενός μεσαίου ελεύθερου βήματος στην διεύθυνση του πεδίου.

Για ομοιόμορφα πεδία και για σταδιακή αύξηση της τιμής του πεδίου, ακριβώς την στιγμή που παρατηρείται ο ιονισμός, προκαλείται πλήρης διάσπαση του διηλεκτρικού μέσου. Σε μη όμως ομοιόμορφα πεδία και πριν από τον σπινθηρισμό που θα προκαλέσει την διάσπαση, παρατηρούνται κάποιες . χωρικά περιορισμένες εκκενώσεις οι οποίες ονομάζονται εκκενώσεις Corona, που συνοδεύονται από οπτικά φαινόμενα υπό τη μορφή αίγλης ή και από ακουστικά φαινόμενα υπό τη μορφή ενός χαρακτηριστικού ήχου κατά την εκδήλωση των εκκενώσεων αυτών. Αυτές οι ηλεκτρικές εκκενώσεις προκύπτουν από την πολύ μεγάλη ένταση του πεδίου τοπικά σε ένα περιορισμένο χώρο, συνήθως γύρω από το ηλεκτρόδιο με την μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας

Όσο αυξάνεται το δυναμικό μεταξύ δύο παράλληλων ηλεκτροδίων και πλησιάζει μία κρίσιμη τιμή (ανάλογα με το διηλεκτρικό μέσο) αρχίζει να παρατηρείται το φαινόμενο Corona, αλλά για να γίνει ορατό θα πρέπει τα φορτισμένα ιόντα του αέρα να αποκτήσουν μια αρκετά μεγάλη ποσότητα ενέργειας ώστε να προκαλέσουν περαιτέρω ιονισμό με συγκρούσεις με άλλα σωματίδια του αέρα. E. (Kuffel E. , Zaengl W.S, J.Kuffel ,2000)

Σύμφωνα με τον Peek F.W.(1915), υπάρχει μία απόσταση ανάμεσα στο ηλεκτρόδιο και στην περιοχή όπου γίνεται ιονισμός (περιοχή ιονισμού) και διάσπαση του διηλεκτρικού μέσου , η λεγόμενη ενεργειακή απόσταση , απαραίτητη ώστε το σωματίδιο να αποκτήσει ενέργεια και να μπορέσει να ιονιστεί αποκτώντας παράλληλα μεγάλη ταχύτητα. Η απόσταση αυτή έχει υπολογιστεί και είναι $a=0.301\sqrt{r}$, όπου r είναι η ακτίνα καμπυλότητας του ηλεκτροδίου και για τον αέρα η τιμή διάσπασης είναι 30kV/cm . Το σωματίδιο που θα βρεθεί στην περιοχή του ιονισμού λόγω του ότι θα ιονιστεί και θα αποκτήσει μεγάλη ταχύτητα θα κινηθεί πάνω στην δυναμική γραμμή του πεδίου. Δηλαδή τα ιονισμένα σωματίδια ακολουθούν τις δυναμικές γραμμές του πεδίου.



Εικόνα 1.5: Απεικόνιση της περιοχής ιονισμού γύρω από το ηλεκτρόδιο ,όπως αυτή αναφέρεται από τον Peek F.W , 1915

1.5 Ένταση του ηλεκτρικού πεδίου και κατανομή του δυναμικού.

Η εύρεση του δυναμικού σε κάθε σημείο παίζει καθοριστικό ρόλο στην εξεύρεση σημαντικών πληροφοριών για το ηλεκτροστατικό πεδίο. Η ένταση του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να προσδιοριστεί από το gradient του δυναμικού δηλαδή (Matthew N.O. Sadiku,2007) :

$$\vec{E} = -\nabla V \quad (1.7)$$

όπου ουσιαστικά είναι μια διαφορική εξίσωση, ενώ με το υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μπορεί να υπολογιστεί η ένταση της ηλεκτρικής ροής από τη σχέση :

$$D = \varepsilon \vec{E} \quad (1.8)$$

και πάλι μέσω της διαφορικής εξίσωσης από το gradient της έντασης της ηλεκτρικής ροής προκύπτει η πυκνότητα του φορτίου:

$$\nabla \cdot D = \rho \quad (1.9)$$

αντικαθιστώντας στην σχέση (1.9) με $\varepsilon \cdot \vec{E} = D$ προκύπτει :

$$\nabla \cdot \varepsilon \vec{E} = \rho$$

ή

$$-\nabla \cdot \varepsilon \cdot \nabla V = \rho$$

ή

$$\varepsilon \nabla^2 V = -\rho$$

όπου τελικά :

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1.10)$$

Η σχέση (1.10) είναι γνωστή ως εξίσωση Poisson , για τον λόγο όμως ότι στους περισσότερους εξοπλισμούς υψηλής τάσης δεν παρουσιάζονται χωρικά φορτία , δηλαδή $\rho=0$ προκύπτει η σχέση :

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1.11)$$

Η σχέση (1.11) είναι γνωστή ως εξίσωση Laplace και παρά το ότι ισχύει $\rho=0$, δηλαδή δεν υφίσταται χωρικά φορτία, εμφανίζονται σημεία φορτία και επιφανειακές φορτίσεις οι οποίες πηγάζουν από το πεδίο. Το gradient ∇ (η ανάδελτα) είναι ένα διανυσματικό μέγεθος και εκφράζεται μαθηματικά σε καρτεσιανές συντεταγμένες σαν :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z \quad (1.12)$$

Επομένως η εξίσωση Laplace στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων δίνεται από την σχέση :

$$\nabla^2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1.13)$$

Ο προσδιορισμός της κατανομής του δυναμικού βάσει της σχέσης (1.13) είναι μια εξαιρετικά πολύπλοκη εργασία. Για αυτό η χρησιμοποίηση διαφόρων τεχνικών υπολογισμού είναι απαραίτητη (Morrison R.D & Hopstock D.M, 1979), οι οποίες χωρίζονται σε δύο κατηγορίες (Wadhwa C.L, 2007) :

➤ Αριθμητικές

- Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ)
- Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (Μ.Π.Δ)
- Η μέθοδος προσομοίωσης φορτίου (Μ.Π.Φ)
- Η μέθοδος προσομοίωσης επιφανειακής φόρτισης (Μ.Π.Ε.Φ)

➤ Πειραματική

- Η μέθοδος του ηλεκτρολυτικού δοχείου

Κεφάλαιο 2 : Τεχνικές αριθμητικής ανάλυσης.

2.1 Αριθμητικές μέθοδοι ανάλυσης.

Κατά το πέρασμα του χρόνου έχουν αναπτυχθεί και εξελιχθεί αρκετές προσεγγιστικές αριθμητικές μέθοδοι ανάλυσης. Στην σημερινή εποχή και με την ραγδαία ανάπτυξη της υπολογιστικής ισχύος των ηλεκτρονικών υπολογιστών είναι εφικτή η εξεύρεση πιο αποδοτικών και με μεγαλύτερη ακρίβεια εναλλακτικών αριθμητικών λύσεων, διατηρώντας την πολυπλοκότητα του εκάστοτε προβλήματος. Μεταξύ των διαφόρων αριθμητικών μεθόδων που έχουν εξελιχθεί με τα χρόνια, οι πιο συχνά χρησιμοποιούμενες τεχνικές είναι οι εξής : (Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhally N. Seetharamu, 2004)

- Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών (finite difference method).
- Η μέθοδος του πεπερασμένου όγκου (finite volume method)
- Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (finite element method).

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών.

Η μέθοδος των πεπερασμένων διαφορών έχει χρησιμοποιηθεί κατά κόρον σε προβλήματα μεταφοράς θερμότητας ενώ είναι μία πολύ καλά οργανωμένη και εννοιολογικά απλή μέθοδος που χρησιμοποιεί ένα σημειακό τρόπο εκτίμησης των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα δημιουργώντας ένα δικτύωμα από σημεία . Το μοντέλο του προβλήματος δημιουργείται από τις διαφορικές εξισώσεις για κάθε συστοιχία των σημείων του πλέγματος .Επομένως όσο ποιο πολλά είναι αυτά τα σημεία , τόσο ποιο ακριβές είναι και το μοντέλο. Με αυτή τη μέθοδο μπορούμε να αντιμετωπίσουμε αρκετά δύσκολα προβλήματα, αλλά σε περίπτωση ασυνήθιστων η ακανόνιστων γεωμετριών που απαιτούνται οριακές συνθήκες η συγκεκριμένη μέθοδος γίνεται αρκετά δύσχρηστη και δύσκολη να εφαρμοστεί. (Ozisik M.N and Czisik M.N, 1994)

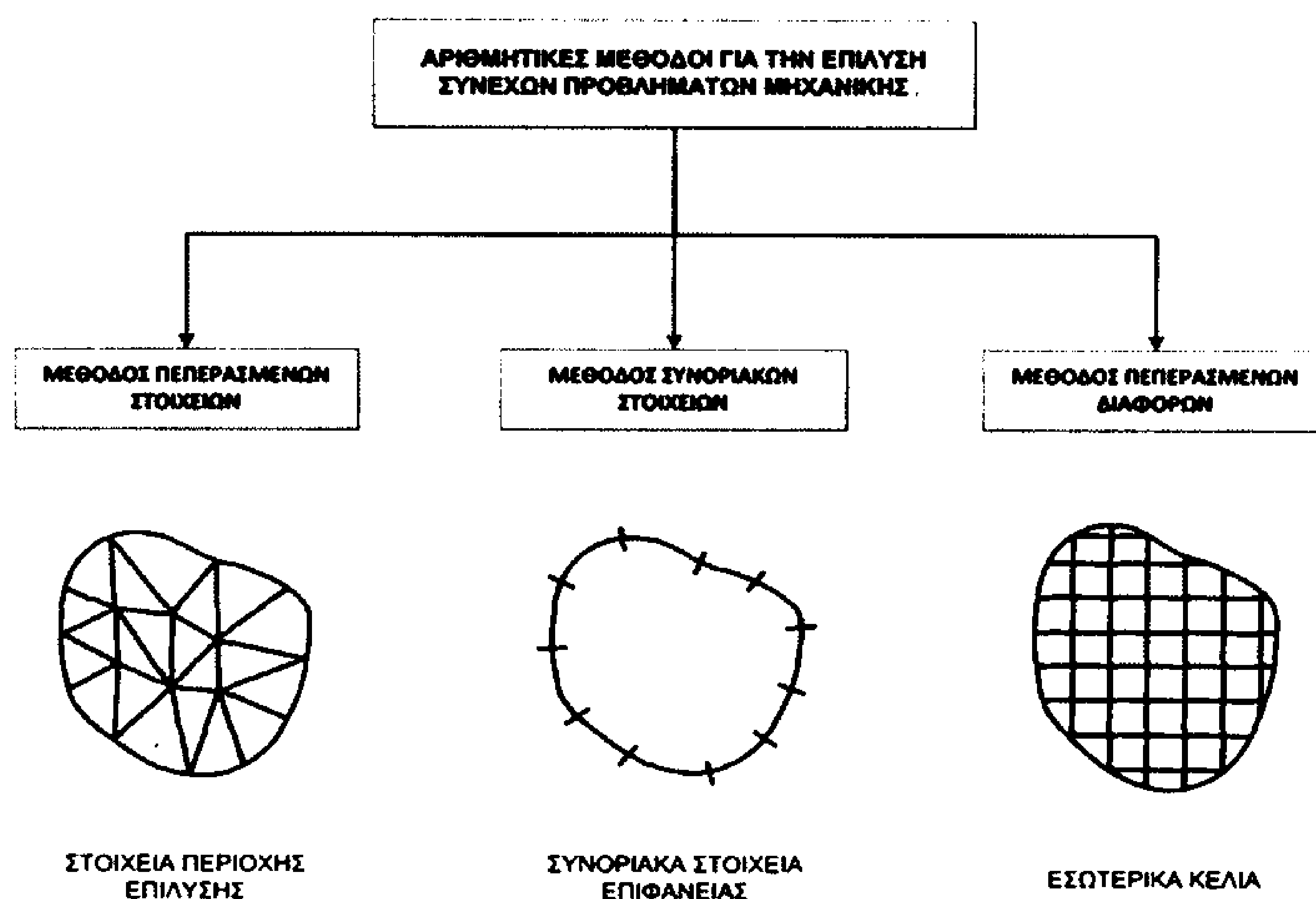
Η μέθοδος του πεπερασμένου όγκου

Σε αντίθεση με τη μέθοδο των πεπερασμένων διαφορών, η οποία για τον προσδιορισμό της λύσης βασίζεται σε μια συστοιχία σημείων ενός πλέγματος, η

μέθοδος του πεπερασμένου όγκου (ή συνοριακών στοιχείων) χρησιμοποιεί τεχνικές για την εφαρμογή συνοριακών συνθηκών προκειμένου να δημιουργήσει το μοντέλο. Η εφαρμογή της είναι δημοφιλής κυρίως σε προβλήματα ρευστοδυναμικής (Patankar S.V, 1980) και ουσιαστικά είναι μια πιο εξελιγμένη μορφή της μεθόδου των πεπερασμένων διαφορών. Ακόμα είναι παρόμοια με την γραμμική μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων του Malan , (2002).

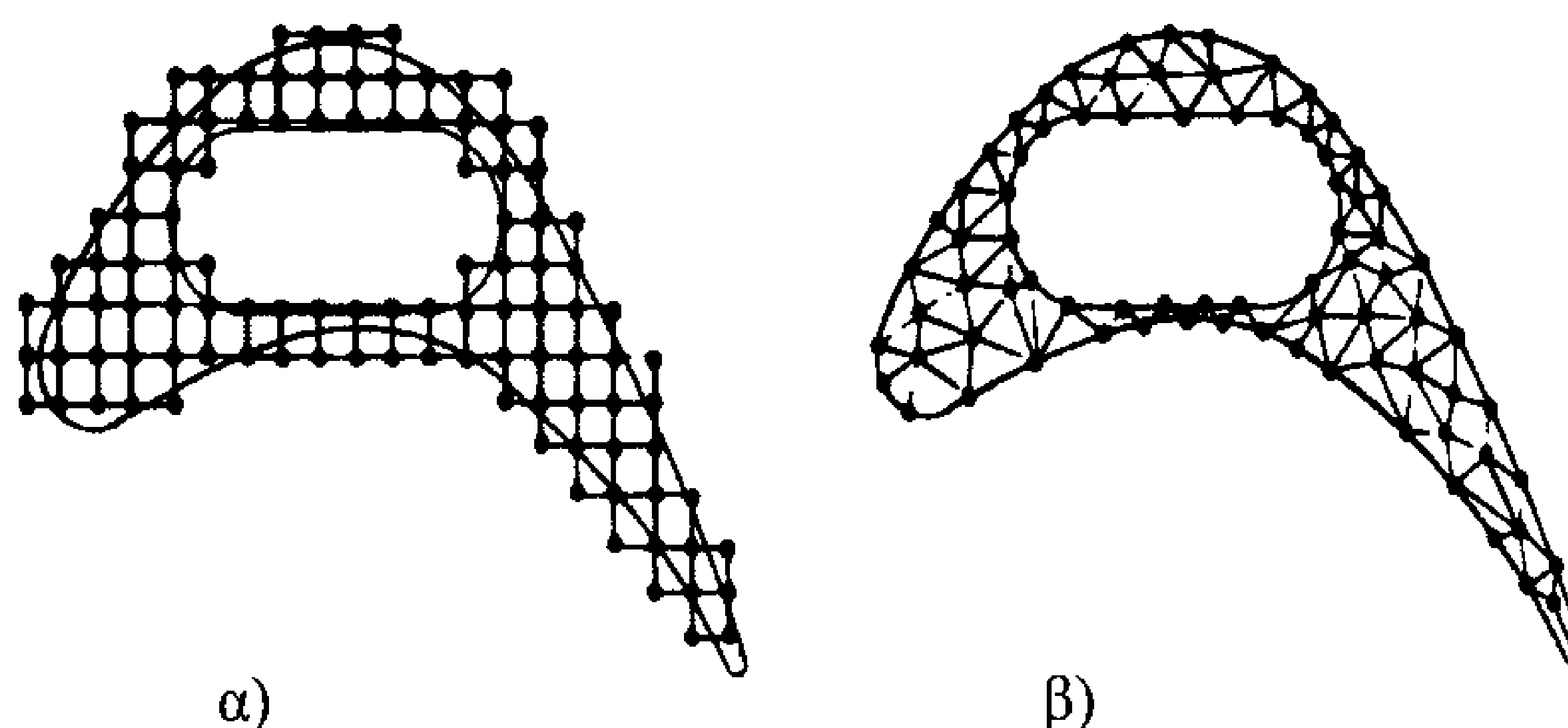
Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων θεωρεί ότι η περιοχή επίλυσης αποτελείται από πολλά μικρά, διασυνδεδεμένα μεταξύ τους στοιχεία, ή υπο-περιοχές . Δίνει μία τμηματική προσέγγιση των εξισώσεων που διέπουν το πρόβλημα, οποίες είναι σύνθετες διαφορικές εξισώσεις , όπου και αντικαθίστανται από ένα σύστημα γραμμικών ή μη γραμμικών εξισώσεων. Η βασική αρχή της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι ότι η περιοχή επίλυσης μπορεί μοντελοποιηθεί αναλυτικά ή κατά προσέγγιση ,και να αντικατασταθεί από μια συνάθροιση διακριτών (πεπερασμένων) στοιχείων. Αυτά τα στοιχεία μπορούν να συνδυαστούν μεταξύ τους με διάφορους τρόπους, έτσι ώστε να δημιουργούν και να αντιπροσωπεύουν εξαιρετικά πολύπλοκα σχήματα. (Zienkiewicz O.C and Taylor R.L, 2000 , J.N Reddy,1993, Huebner K. and Thornton E.A, 1982)



Εικόνα 2.1: Αριθμητικές μέθοδοι επίλυσης προβλημάτων μηχανικής

Ένα παράδειγμα του πώς ένα μοντέλο πεπερασμένων διαφορών και ένα μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ώστε να αντιπροσωπεύει μια σύνθετη γεωμετρική μορφή, παρατίθεται η παρακάτω γεωμετρία. Έστω ότι για αυτή την γεωμετρία θέλουμε να βρούμε την κατανομή των φορτίσεων που δέχεται για μια δεδομένη δύναμη. Από το παρακάτω σχήμα φαίνεται ότι πρόκειται για μια ακανόνιστη γεωμετρία



Εικόνα 2.1: (α) πλέγμα μεθόδου πεπερασμένων διαφορών , (β) πλέγμα μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων

Ένα ενιαίο πλέγμα (mesh) πεπερασμένων διαφορών καλύπτει σε ικανοποιητικά επίπεδα την περιοχή επίλυσης αλλά τα «όρια» (boundaries) της περιοχής πρέπει να προσεγγιστούν από μια σειρά οριζόντιων και κάθετων γραμμών, «βήματα σκαλοπατιών» (stair steps). Από την άλλη πλευρά, το μοντέλο πεπερασμένων στοιχείων (χρησιμοποιώντας το πιο απλό δισδιάστατο στοιχείο ,το τρίγωνο) δίνει μια καλύτερη προσέγγιση στην περιοχή. Επίσης, παρέχει μια καλύτερη προσέγγιση στα όρια της καθώς κάθε κυρτό όριο αναπαρίσταται από ευθείες γραμμές για κάθε κλίση. Από το παράδειγμα αυτό συμπεραίνουμε εύκολα ότι η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων είναι ιδιαίτερος κατάλληλη για προβλήματα με πολύπλοκες και πολλές φορές ακανόνιστες γεωμετρίες .

2.2 Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ).

Η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων (Μ.Π.Σ) είναι μια τεχνική αριθμητικής ανάλυσης για τον προσδιορισμό κατά προσέγγιση λύσεων σε ένα ευρύ φάσμα προβλημάτων μηχανικής. Αρχικά αναπτύχθηκε για τη μελέτη των

καταπονήσεων σε πολύπλοκες δομές ατράκτων αεροσκαφών , (Clough R.W ,1960) , αλλά με την πάροδο των χρόνων έχει επεκταθεί και εφαρμοστεί σε ένα ευρύ πεδίο της μηχανικής , (Zienkiewicz O.C and Cheung Y.K, 1965). Λόγω της ποικιλομορφίας και της ευελιξίας πού παρέχει ως εργαλείο ανάλυσης, τυγχάνει ευρείας αποδοχής σε σχολές μηχανικών και στη βιομηχανία.

Σε όλο και περισσότερες περιπτώσεις σύνθετων προβλημάτων μηχανικής σήμερα, διαπιστώνουμε ότι είναι απαραίτητο να προσδιορίσουμε προσεγγιστικές αριθμητικές λύσεις, καθώς η πολυπλοκότητα των προβλημάτων καθίστα αδύνατο τον προσδιορισμό μιας ακριβής λύσης (Morrison R.D & Hopstock D.M, 1979) . Παραδείγματα σύνθετων προβλημάτων :

- Η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε συνθήκες υψηλής τάσης και ο προσδιορισμός της έντασης διάσπασης των μονωτικών υλικών
- Η ψύξη ηλεκτρονικού εξοπλισμού (ή τσιπ).
- Ο υπολογισμός του φορτίου που μπορεί να δεχτεί ένα επίπεδο.
- Η συγκέντρωση του ρύπων σε μη ομοιόμορφες ατμοσφαιρικές συνθήκες.
- Η εκτίμηση της ροής ενός υγρού σε ένα αγωγό.
- Η ψύξη ηλεκτρικών κινητήρων.

Αν και είναι δυνατόν να καταστρώσουμε τις εξισώσεις και τις οριακές συνθήκες που διέπουν αυτά τα προβλήματα, δεν είναι απλό να καταλήξουμε σε μια αναλυτική λύση. Η δυσκολία σε αυτά τα παραδείγματα έγκειται στο γεγονός ότι η γεωμετρία τους είναι ακανόνιστη ή κάποιο άλλο βασικό χαρακτηριστικό τους είναι αρκετά πολύπλοκο. Έτσι οι μηχανικοί καλούνται να λύσουν τέτοιου είδους προβλήματα στα οποία σαφής αναλυτικές λύσεις σπάνια η δύσκολα υπάρχουν.

Η επινοητικότητα του εκάστοτε μηχανικού έγκειται στην παροχή διάφορων εναλλακτικών λύσεων προκειμένου να ξεπεραστεί αυτό το πρόβλημα. Έτσι παρέχεται η δυνατότητα της απλοποίησης κάποιων παραδοχών του προβλήματος προκειμένου να ξεπεραστούν αυτές οι δυσκολίες και να μειωθεί το πρόβλημα σε ένα μικρότερου μεγέθους ώστε να μπορεί να αντιμετωπιστεί. Μερικές φορές αυτή η διαδικασία έχει ικανοποιητικά αποτελέσματα αλλά συχνά οδηγεί σε ανακριβείς ή λάθος λύσεις.

2.3 Ιστορική αναδρομή της Μ.Π.Σ.

Η μέθοδος πεπερασμένων στοιχείων χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά το 1960 από τον Clough R.W σε μια δημοσίευση σχετικά με τα προβλήματα ελαστικότητας στο επίπεδο. Η ιδέα όμως της συγκεκριμένης μεθόδου χρονολογείται πολύ πιο πίσω . Το πότε και από ποιόν αρχικά δημιουργήθηκε εξαρτάται από το επιστημονικό πεδίο στο οποίο υπάγεται το εκάστοτε πρόβλημα, για αυτό και υπάρχουν και τρεις διαφορετικές απαντήσεις ανάλογα με την εφαρμογή του προβλήματος:

- Μαθηματική εφαρμογή
- Εφαρμογή φυσικής
- Εφαρμογή μηχανικής

Έτσι έχουν αναπτυχθεί αρκετές βασικές ιδέες πάνω στην μέθοδο σε διαφορετικές χρονικές στιγμές και για διαφορετικούς λόγους. Οι μαθηματικοί ήθελαν να βρουν κατά προσέγγιση οριακές τιμές και συνθήκες για ανώτατα και κατώτατα όρια ιδιοτιμών σε συνεχή προβλήματα. Οι φυσικοί ενδιαφέρονταν για την επίλυση συνεχών προβλημάτων, αναζητώντας τμηματικές κατά προσέγγιση συναρτήσεις που να αντιπροσωπεύουν τα συνεχή προβλήματα τους . Οι μηχανικοί ήταν αντιμετώποι με όλο και πιο σύνθετα προβλήματα αεροδιαστημικής και καταπονήσεων, και έψαχναν για έναν τρόπο με τον οποίο π.χ να βρίσκουν τους συντελεστές εκείνους που επηρεάζουν την ακαμψία του κελύφους της ατράκτου τύπου για διάφορους τύπους αεροσκαφών. Έτσι προέκυψαν τρία σει δημοσιεύσεων με διαφορετικές απόψεις.

Οι πρώτες προσπάθειες για τη χρήση τμηματικών κατά προσέγγιση συναρτήσεων που ορίζουν τριγωνικές επιφάνειες εμφανίζονται στη βιβλιογραφία για τα εφαρμοσμένα μαθηματικά με το έργο του Courant R. το 1943. Ο Courant χρησιμοποίησε μια συνάθροιση τριγωνικών στοιχείων και της αρχή του ελάχιστου ενεργειακού δυναμικού για τη μελέτη ενός προβλήματος στρέψης

Το 1959 ο Greenstadt J. , υποκινούμενος από μια συζήτηση στο βιβλίο των Morse P.M and Feshback H. το 1953 εφάρμοσε μια προσέγγιση με διάτμηση της περιοχής επίλυσης σε "κελιά" αντί για σημείων, δηλαδή φαντάστηκε μια περιοχή

επίλυσης αποτελούμενη από ένα σύνολο συνεχόμενων υποπεριοχών . Στη θεωρία του, περιγράφει μια διαδικασία για την αναπαράσταση μιας άγνωστη συνάρτησης με μια σειρά από συναρτήσεις οι οποίες εκφράζουν κάθε κελί. Μετά τον καθορισμό και την εξεύρεση των κατάλληλων μεταβλητών σε κάθε κελί, και χρησιμοποιώντας τις οριακές συνθήκες του συνεχούς προβλήματος συνδέει μεταξύ τους τις εξισώσεις όλων των κελίων. Με τον τρόπο αυτό μειώνει το συνεχές πρόβλημα σε μικρότερα απλούστερα υποπροβλήματα. Η θεωρία του Greenstadt J. (1959) , χρησιμοποιεί ένα δικτύωμα από πολλά κελιά και περιέχει πολλές από τις βασικές και θεμελιώδεις ιδέες που χρησιμεύουν ως μαθηματική βάση για τη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων, όπως την γνωρίζουμε σήμερα.

Δεδομένου ότι το πεδίο εφαρμογής της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων άρχισε να αναπτύσσεται και στους τομείς της μηχανικής και της φυσικής, οι μαθηματικοί έδειξαν ιδιαίτερο ενδιαφέρον ώστε να αποκτήσει η μέθοδος μια σταθερή μαθηματική θεμελίωση. Ως αποτέλεσμα, δημιουργήθηκε ένα αρκετά μεγάλος αριθμός μελετών που αποσκοπούσαν στην εκτίμηση του σφάλματος διακριτοποίησης (κατάτμησης των στοιχείων), των ποσοστών της σύγκλισης τους, και τη σταθερότητά και την ακρίβεια των διάφορων τύπων των προσεγγίσεων των πεπερασμένων στοιχείων. Από τα τέλη της δεκαετίας του 1960 και μετά ,η βιβλιογραφία πάνω στη μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων αυξάνεται όλο και περισσότερο σε σχέση με οποιαδήποτε άλλη προηγούμενη περίοδο.

Παράλληλα με την ανάπτυξη και την εφαρμογή της ιδέας της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων από τους μαθηματικούς, οι φυσικοί ανέπτυσαν παρόμοιες ιδέες και προσεγγίσεις για διάφορες μεθόδους. Βασικό παράδειγμα αποτελεί η μελέτη των Prager W. and.Synge J.L το 1947 , που οδήγησε στην ανάπτυξη της υπερβολικής μεθόδου (hypercircle). Η παραπάνω μέθοδος αναπτύχθηκε αρχικά με βάση την κλασική θεωρία ελαστικότητας προκειμένου να προσδώσει βασικές αρχές και χαρακτηριστικά στην γεωμετρική ερμηνεία της ελαστικότητας . Η μέθοδος που προτάθηκε από τον Synge J.L (1947) μπορεί να εφαρμοστεί για την επίλυση συνεχών προβλημάτων με τον ίδιο τρόπο όπως και οι τεχνικές των πεπερασμένων στοιχείων .

Στη δεκαετία του 1930, οι μηχανικοί αντιμετώπιζαν προβλήματα στήριξης. Με τις τότε γνωστές μεθόδους επίλυσης για τις σύνθετες καταπονήσεις, γινόταν εφαρμογή κάποιων βημάτων επίλυσης προκειμένου να υπολογίσουν το συνολικό φορτίο της κατασκευής καθώς και τις δυνάμεις (καταπονήσεις) που ασκούσαν από

αυτό πάνω της. Πρώτον, γνώριζαν ότι εφόσον η στήριξη της κατασκευής γινόταν από ένα δικτύωμα ράβδων μπορούσαν να προσδιορίσουν τα χαρακτηριστικά της δύναμης-παραμόρφωσης σε κάθε ράβδο. Στη συνέχεια αφού γνώριζαν τα ατομικά χαρακτηριστικά της κάθε ράβδου και σύμφωνα με τους νόμους της ισορροπίας προέκυπτε ένα σύστημα εξισώσεων για τις άγνωστες δυνάμεις και καταπονήσεις του συνολικού συστήματος.

Η διαδικασία αυτή λειτουργούσε πολύ καλά κάθε φορά που η εν λόγω κατασκευή είχε ένα πεπερασμένο αριθμό σημείων διασύνδεσης των ράβδων στήριξης. Στην περίπτωση όμως μιας πιο σύνθετης και πολύπλοκης κατασκευής, με σχετικά άπειρο αριθμό σημείων διασύνδεσης το πρόβλημα γινόταν εξαιρετικά δύσκολο και πολύπλοκο στην επίλυσή του. Ο Hrenikoff A. (1941) υποστήριξε ότι αυτή η δυσκολία στην ανάλυση της κατασκευής θα μπορούσε να αντικατασταθεί από την παραδοχή ότι αυτή η συνεχής δομή της θα μπορούσε να διαιρεθεί σε στοιχεία ή δομικές ενότητες (δοκάρια), τα θα συνδέονται μεταξύ τους με έναν πεπερασμένο αριθμό σημειακών κόμβων. Με την παραπάνω υπόθεση το πρόβλημα θα μπορούσε να απλοποιηθεί και να αποτελείται από πιο απλές υποπεριοχές οι οποίες θα ήταν εφικτό να επιλυθούν από τις παλιές κλασσικές μεθόδους. Τελικά λόγω της επιτυχίας που είχε η ιδέα του Hrenikoff A. (1941) άρχισαν να αναπτύσσονται και να εφαρμόζονται διάφορες τεχνικές πεπερασμένων στοιχείων και στο επίπεδο της εφαρμοσμένης μηχανικής.

Λίγο αργότερα, οι McHenry D. (1943) και Newmark N. M (1949), ανέπτυξαν περαιτέρω την ιδέα της διακριτοποίησης των προβλημάτων, ενώ ο Kron G. (1944), μελέτησε τις τοπολογικές ιδιότητες των διακριτών συστημάτων κατά την εφαρμογή των παραπάνω νέων μεθόδων. Έπειτα ακολουθεί μια δεκαετία στασιμότητας και μη περαιτέρω ανάπτυξης των μεθόδων επίλυσης με πεπερασμένα στοιχεία, η οποία τελικά σταματάει το 1954, όταν ο Argyris J. H (1954) και οι συνεργάτες του άρχισαν να δημοσιεύουν μια σειρά εγγράφων στα οποία κάλυπταν εκτενώς την εφαρμογή μιας γραμμικής δομικής ανάλυσης, καθώς και διάφορες αποτελεσματικές τεχνικές επίλυσης, οι οποίες ήταν κατάλληλες και για αυτόματο ψηφιακό υπολογισμό.

Η πραγματική επίλυση των προβλημάτων των καταπονήσεων με την χρήση τριγωνικών στοιχείων των οποίων οι ιδιότητες καθορίζονταν από τις εξισώσεις της θεωρίας της ελαστικότητας, παρουσιάζεται για πρώτη φορά πρώτη φορά το 1956 σε μια δημοσίευση των Turner M. J., Clough R. W., Martin H. C, and Topp L. C. ,ενώ ήταν οι πρώτοι που εισήγαγαν τον όρο αυτό που τώρα είναι γνωστό ως άμεση

μέθοδος δυσκαμψίας για τον καθορισμό των ιδιοτήτων των πεπερασμένων στοιχείων. Οι μελέτες τους, μαζί με την έλευση του ηλεκτρονικού υπολογιστή εκείνη την περίοδο, άνοιξαν το δρόμο για την επίλυση των πολύπλοκων προβλημάτων ελαστικότητας σε εξαιρετικά πολύπλοκες δομές κατασκευών. Μετά από περαιτέρω επεξεργασία του προβλήματος ελαστικότητας από τον Clough R.W το 1960, οι μηχανικοί άρχισαν να αναγνωρίζουν την αποτελεσματικότητα της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Το 1965 η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων λαμβάνει μια ακόμη ευρύτερη εφαρμογή της ιδέας της όταν οι O.C Zienkiewicz O.C and Cheung Y.K (1965) ανέφεραν ότι μπορεί εφαρμοστεί και να ισχύσει σε όλα τα προβλήματα που έχουν μεταβλητή μορφή. Στα τέλη της δεκαετίας του 1960 και στις αρχές του 1970 ,οι μηχανικοί μελετούσαν την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων για διάφορα προβλήματα στον τομέα της στερεής μηχανικής.

Σε μια δημοσίευση του ο Clough R.W (1960), δίνει μια πλήρη και αναλυτική εξέλιξη της μεθόδου, καθώς και την εφαρμογή της από την εταιρεία αεροναυπηγικής Boeing, όπου και τελικά εισάγει τον τίτλο: «Μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων» (*finite element method* ή *FEM*.)

Στα χρόνια από το 1960 μέχρι και σήμερα η μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων έχει τύχει ευρείας αποδοχής στην εφαρμοσμένη μηχανική.

Μερικά στατιστικά στοιχεία που τεκμηριώνουν την ευρεία αποδοχή που λαμβάνει σε διάφορους επιστημονικούς τομείς (Wikipedia).

1. Το 1974 απαριθμούνται λιγότερο από δέκα βιβλία πεπερασμένων στοιχείων, το 1980 φτάνουν τα 45 και μετά το 1990 ο αριθμός τους υπερβαίνει τα 100.
2. Αναφέρεται ότι έχουν πραγματοποιηθεί πάνω από 200 συνεδρία και συμπόσια με θέμα την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων.

2.4 Βασική αρχή λειτουργίας της Μ.Π.Σ

Σε ένα συνεχές πρόβλημα (καθορίζουμε ένα πρόβλημα συνεχές να είναι ένα υλικό , στερεό υγρό ή αέριο ή απλώς μια περιοχή στην οποία λαμβάνει χώρα ένα συγκεκριμένο φαινόμενο), οποιασδήποτε διάστασης στο οποίο υπάρχουν μεταβλητά στοιχεία (πίεση, θερμοκρασία, μετατόπιση, καταπόνηση, ή κάποια άλλη ποσότητα)

παρατηρούνται απείρως πολλές τιμές στις μεταβλητές, επειδή κάθε μεταβλητή λαμβάνει τιμές συναρτήσεως του κάθε σημείου της περιοχής του προβλήματος.

Κατά συνέπεια, το πρόβλημα περιέχει έναν άπειρο αριθμό αγνώστων. Οι διαδικασίες διακριτοποίησης πεπερασμένων στοιχείων μειώνουν το πρόβλημα σε έναν πεπερασμένο αριθμό αγνώστων διαιρώντας την περιοχή της επίλυσης σε στοιχεία και εκφράζοντας την άγνωστη μεταβλητή κάθε στοιχείου με μια προσεγγιστική συνάρτηση. Αυτές οι προσεγγιστικές συναρτήσεις (ονομάζονται συναρτήσεις παρεμβολής, interpolation functions) και λαμβάνουν τιμές από τις τιμές της αρχικής μεταβλητής του προβλήματος σε καθορισμένα σημεία. Αυτά τα σημεία ονομάζονται κόμβοι ή κομβικά σημεία. Οι κόμβοι βρίσκονται στα όρια κάθε στοιχείου όταν τα παρακείμενα στοιχεία είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους. Εκτός από τους συνοριακούς κόμβους, ένα στοιχείο μπορεί επίσης να έχει μερικούς εσωτερικούς κόμβους. Οι τιμές των κομβικών σημείων κάθε μεταβλητής της συνάρτησης παρεμβολής σε ένα συγκεκριμένο σημείο καθορίζουν πλήρως τη συμπεριφορά της μεταβλητής για κάθε στοιχείο. (Reddy J.N, 1993)

Για την αναπαράσταση ενός προβλήματος με πεπερασμένα στοιχεία οι κομβικές τιμές της κάθε μεταβλητής γίνονται οι άγνωστοι. Μόλις αυτές οι άγνωστες μεταβλητές βρεθούν, οι συναρτήσεις παρεμβολής καθορίζουν και την συνολική τιμή των μεταβλητών για ολόκληρο το πλέγμα των στοιχείων. Το είδος της λύσης και ο βαθμός της προσέγγισής της εξαρτάται όχι μόνο από το μέγεθος και τον αριθμό των χρησιμοποιούμενων στοιχείων αλλά και από το είδος των συναρτήσεων παρεμβολής που επιλέγονται για κάθε πρόβλημα. Η επιλογή όμως αυτών των συναρτήσεων δεν μπορεί να είναι αυθαίρετη καθώς θα πρέπει να ικανοποιούνται κάποια βασικά κριτήρια και οριακές σχέσεις για κάθε πρόβλημα. (Lewis R.W, Nithiarasu P., Seetharamu K.N, 2004)

Ένα πλεονέκτημα της μεθόδου πεπερασμένων στοιχείων είναι η ποικιλία των τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να διατυπώσει τις ιδιότητες των επιμέρους στοιχείων.

Υπάρχουν τρεις διαφορετικές μέθοδοι.

- Η άμεση προσέγγιση.
- Η μεταβλητή προσέγγιση.
- Η προσέγγιση σταθμισμένων υπολοίπων

Η άμεση προσέγγιση

Σε αυτή τη μέθοδο, η άμεση φυσική αιτιολογία χρησιμοποιείται για να καθορίσει τις ιδιότητες των στοιχείων σε χαρακτηριστικές μήτρες και διανύσματα βάση των συναφών μεταβλητών. Η δυνατότητα εφαρμογής αυτής της μεθόδου περιορίζεται σε απλούς τύπους στοιχείων, και χρησιμοποιείται μόνο για σχετικά απλά προβλήματα μηχανικής ανάλυσης. (G.R. Liu and S.S. Quek, 2003)

Η μεταβλητή προσέγγιση.

Με την μεταβλητή προσέγγιση, η ανάλυση των πεπερασμένων στοιχείων προσδιορίζεται κατά προσέγγιση για την κάθε μεταβολή των δεδομένων του προβλήματος. Δεδομένου ότι τα περισσότερα φυσικά αλλά και μηχανικά προβλήματα διατυπώνονται με μεταβλητή μορφή, η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων μπορεί εύκολα να εφαρμοστεί σε ποιο σύνθετα προβλήματα για την εύρεση προσεγγιστικών λύσεων. Η μεταβλητή προσέγγιση παρουσιάζει μια πιο ευρεία εφαρμογή από τη βιβλιογραφία στη διαμόρφωση των εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων. Ένας σημαντικός περιορισμός της μεθόδου είναι ότι απαιτεί το εκάστοτε πρόβλημα να παρουσιάζει μεταβλητή μορφή, η οποία μπορεί να μην είναι δυνατή σε όλες τις περιπτώσεις. Βασική διαφορά από την άμεση προσέγγιση είναι ότι η μεταβλητή προσέγγιση μπορεί να δημιουργήσει πιο περίπλοκα στοιχεία και κατά συνέπεια να αποδώσει με μεγαλύτερη ακρίβεια της συνθήκες του προβλήματος.

Η προσέγγιση σταθμισμένων υπολοίπων

Σε αυτήν την μέθοδο, οι μήτρες και τα διανύσματα των στοιχείων προέρχονται απευθείας από τις διαφορικές εξισώσεις του προβλήματος, χωρίς την εξάρτηση τους από την μεταβλητή κατάσταση του προβλήματος. Η μέθοδος αυτή προσφέρει την πιο ευέλικτη προσέγγιση για την εξαγωγή των εξισώσεων των πεπερασμένων στοιχείων με υψηλού επιπέδου μαθηματικά και μπορεί να εφαρμοστεί σε όλα σχεδόν τα πρακτικά προβλήματα της μηχανικής.

Με την προσέγγιση σταθμισμένων υπολοίπων μπορούν να εφαρμοστούν διάφορες διαδικασίες, όπως η μέθοδος Galerkin και η μέθοδος ελαχίστων

τετραγώνων, για τον υπολογισμό των εξισώσεων κάθε στοιχείου.. Αυτή η προσέγγιση ουσιαστικά επεκτείνει την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων σε προβλήματα τα οποία είναι πολύ δύσκολα να τα αντιληφτεί ο ανθρώπινος εγκέφαλος λόγω του μεγάλου και σύνθετου αριθμού των μεταβλητών που σχετίζονται με αυτά.

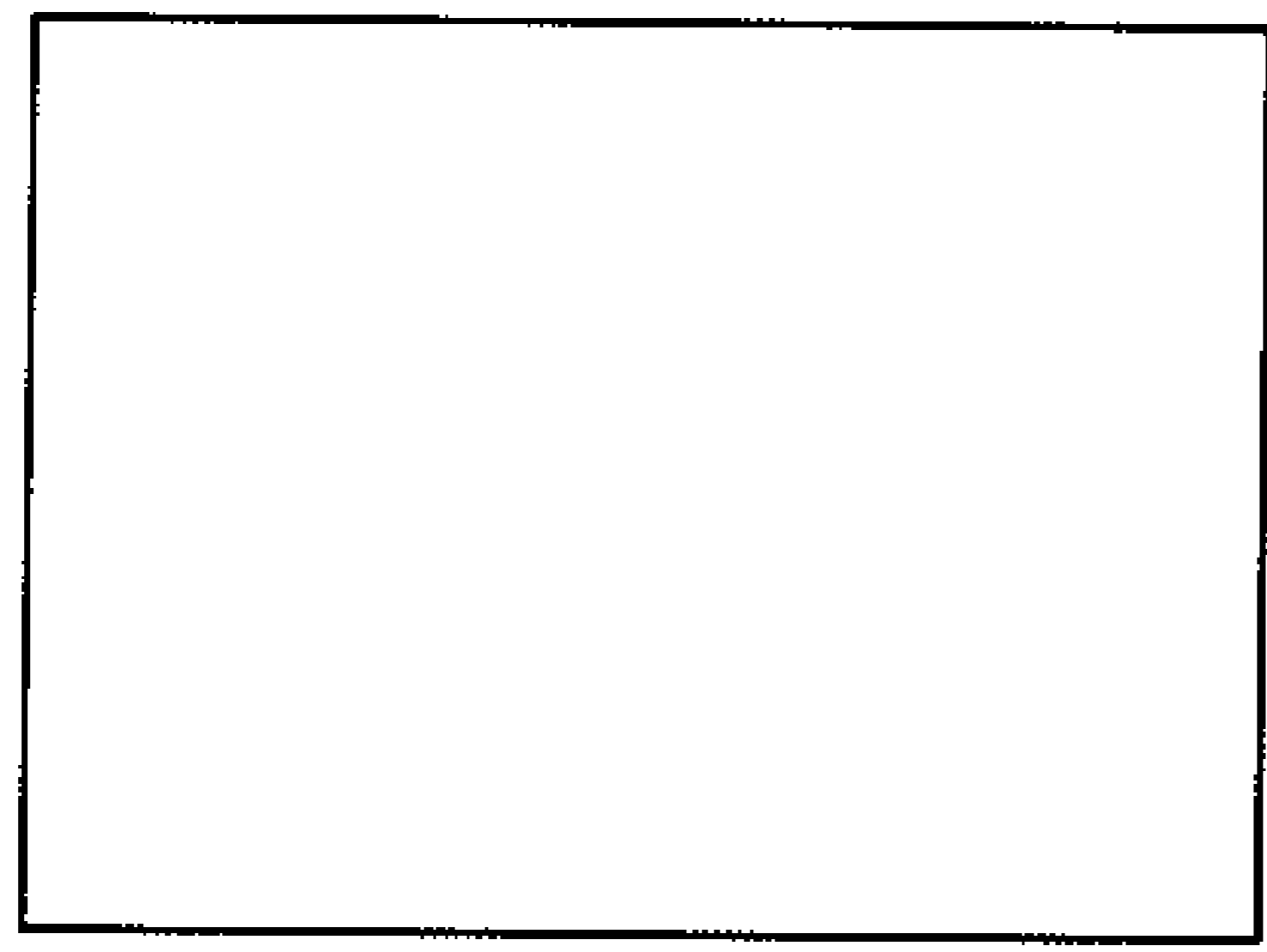
Ανεξάρτητα όμως από το είδος της προσέγγισης που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό των ιδιοτήτων των στοιχείων, η λύση ενός προβλήματος μηχανικής με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων ακολουθεί πάντα μια βηματική διαδικασία (step-by-step process), η οποία αποτελείται από συνολικά 6 βήματα (Liu G.R. and Quek S.S., 2003):

1. Διακριτοποίηση περιοχής
 - α) Διαίρεση της περιοχής επίλυσης σε στοιχεία
 - β) Επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων.
2. Εύρεση των ιδιοτήτων των στοιχείων.
3. Συνάθροιση των ιδιοτήτων των στοιχείων για τον καθορισμό των εξισώσεων του συστήματος.
4. Καθορισμός των οριακών συνθηκών του προβλήματος.
5. Επίλυση εξισώσεων του συστήματος.
6. Επιπρόσθετοι υπολογισμοί.

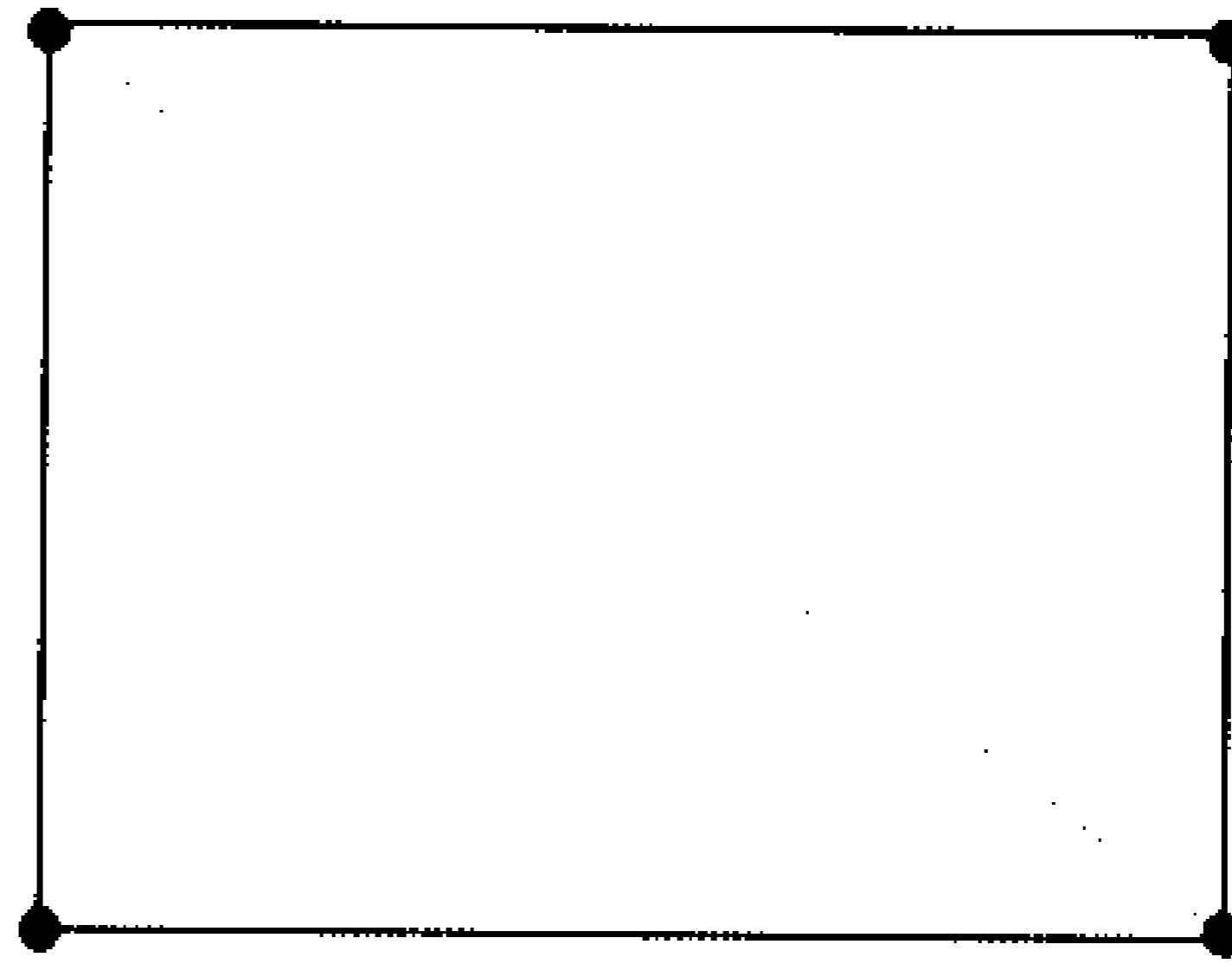
1. (Διακριτοποίηση περιοχής)

- α) Διαίρεση της περιοχής επίλυσης σε στοιχεία

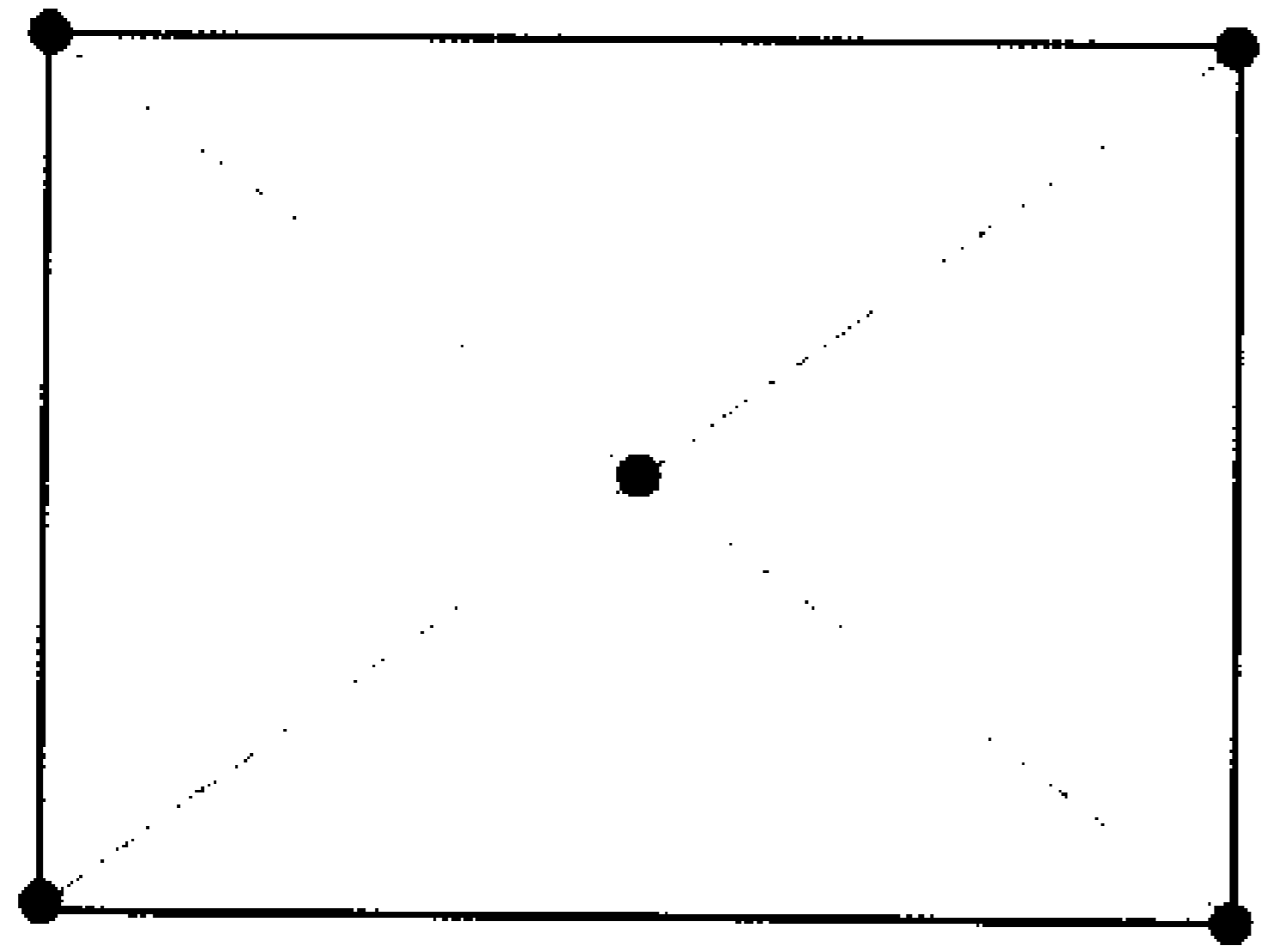
Το πρώτο βήμα είναι η διαίρεση της περιοχής επίλυσης σε στοιχεία.. Μια ποικιλία από σχήματα στοιχείων μπορούν να χρησιμοποιηθούν ακόμα και διαφορετικά για την ίδια περιοχή επίλυσης. Ο αριθμός και το είδος των στοιχείων που θα προκύψουν παίζει καθοριστικό ρόλο στην επίλυση του προβλήματος καθώς και στους κόμβους. Όσο μεγαλύτερος είναι τόσο περισσότεροι κόμβοι θα δημιουργηθούν, επομένως θα υπάρχει μεγαλύτερη ακρίβεια στον υπολογισμό της λύσης του προβλήματος.



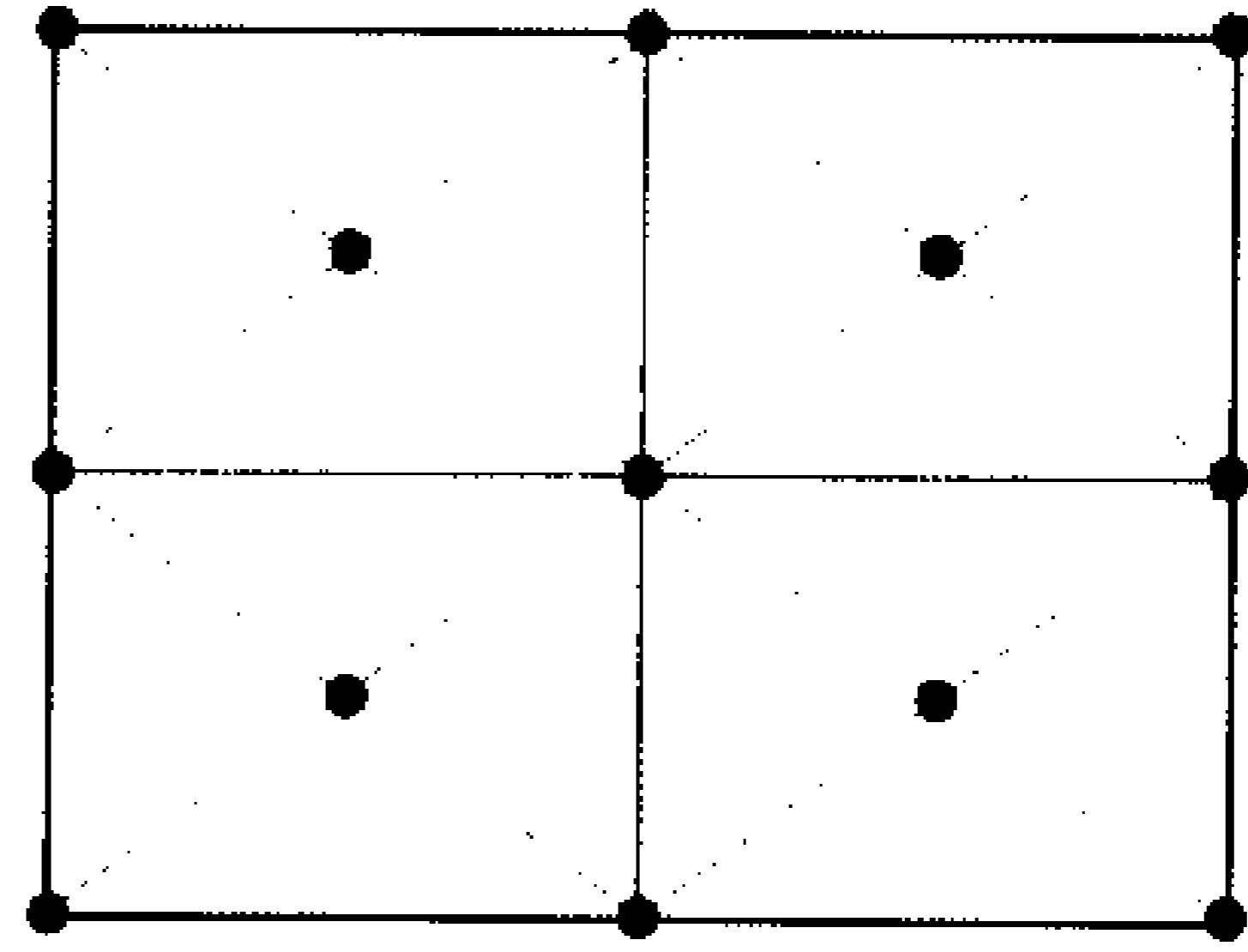
α)



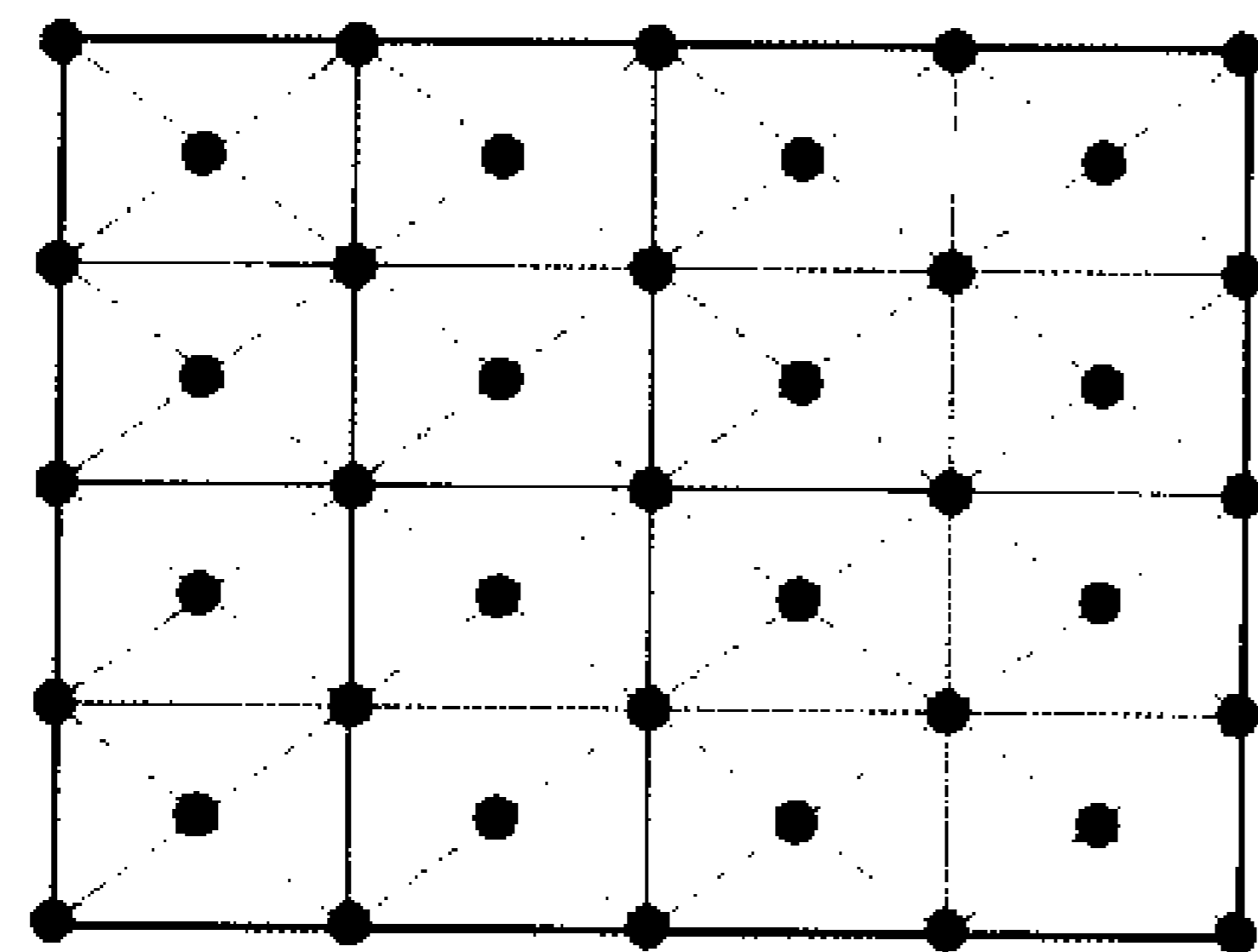
β)



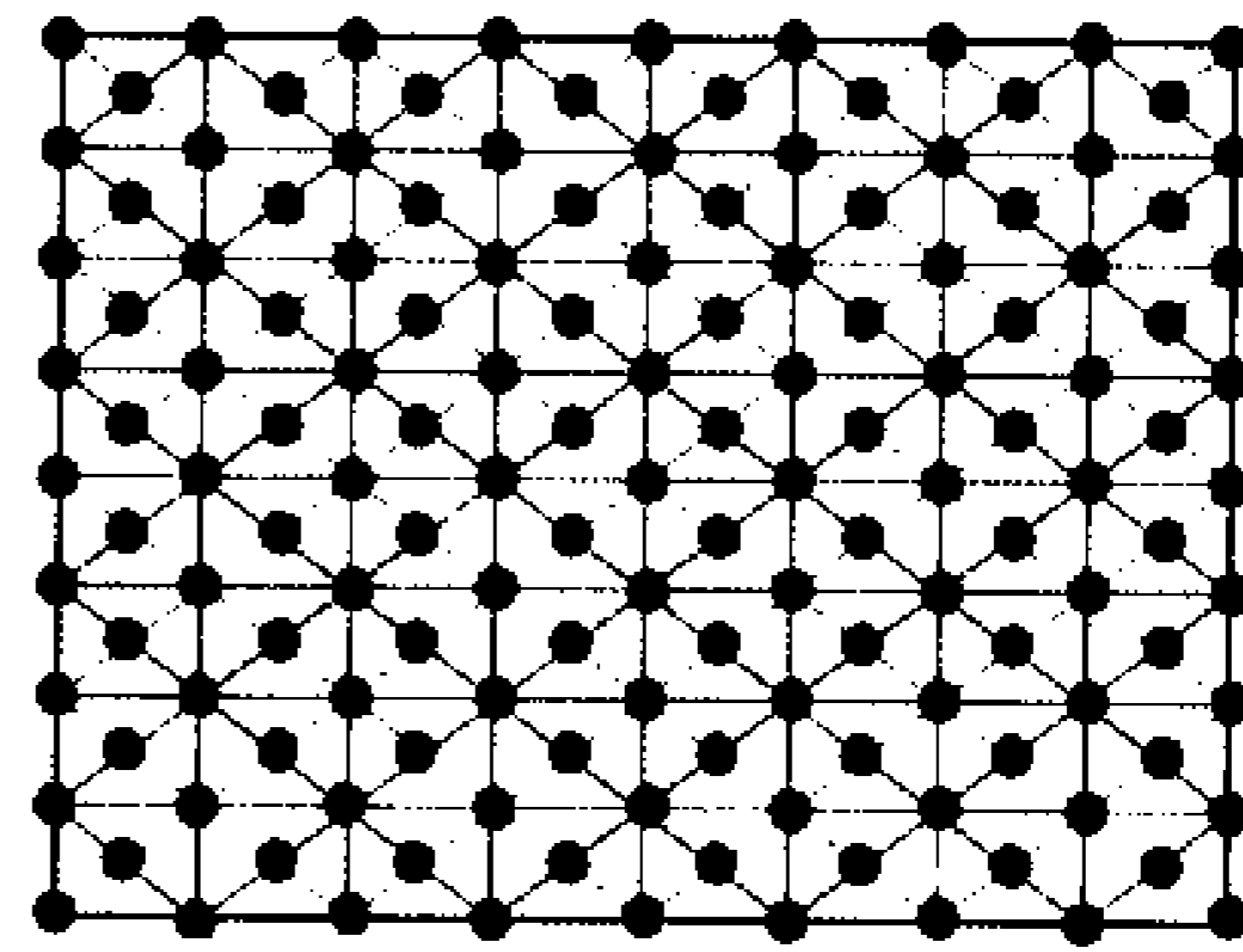
γ)



δ)



ε)



στ)

Εικόνα 2.2: Διαίρεση περιοχής επίλυσης σε στοιχεία α) 1 στοιχείο β) 2 στοιχεία με 4 κόμβους γ) 4 στοιχεία με 5 κόμβους δ) 16 στοιχεία με 13 κόμβους ε) 64 στοιχεία με 41 κόμβους στ) 256 στοιχεία με 145 κόμβους . πηγή: (Liu G.R. and Quek S.S., 2003)

β) Επιλογή των κατάλληλων συναρτήσεων.

Το επόμενο βήμα είναι να καταχωρηθούν οι κόμβοι σε κάθε στοιχείο και στη συνέχεια να επιλεχθεί η κατάλληλη συνάρτηση, ώστε να εκφράζει σωστά τις μεταβλητές της περιοχής επίλυσης. Αυτές οι μεταβλητές μπορεί να είναι μονοδιάστατες, διανύσματα κ.α. Συχνά ως συναρτήσεις επιλέγονται πολυώνυμα καθώς είναι πιο εύκολα στον να διαφοριστούν η να ολοκληρωθούν. Ο βαθμός του επιλεγμένου πολυωνύμου εξαρτάται από τον αριθμό των κόμβων σε κάθε στοιχείο, οπότε και προκύπτει και ο ανάλογος αριθμός μεταβλητών κάθε στοιχείου.

Είδη σχημάτων και επιλογή συναρτήσεων (κατάλληλων πολυωνύμων)

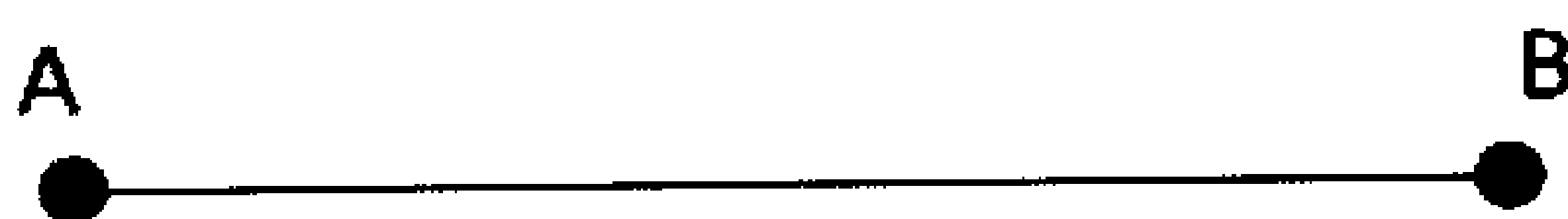
Υπάρχουν αρκετά είδη σχημάτων που μπορούν να χρησιμοποιηθούν από την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων και χωρίζονται σε τρεις μεγάλες κατηγορίες :

- Μονοδιάστατα (γραμμικά) στοιχεία
- Δισδιάστατα στοιχεία
- Τρισδιάστατα στοιχεία

Ακόμα υπάρχει και μια τέταρτη κατηγορία ποιο εξειδικευμένων σχημάτων για εφαρμογές με κυρτές επιφάνειες , που ονομάζονται ισοπαραμετρικά στοιχεία. Τα ισοπαραμετρικά στοιχεία ουσιαστικά προσομοιώνουν τις κυρτές επιφάνειες με γνωστά γεωμετρικά σχήματα. (. Liu G.R and Quek S.S., 2003 , Reddy J.N ,1993)

Μονοδιάστατα γραμμικά στοιχεία

Αυτό το είδος στοιχείων χρησιμοποιείται για να αναπαραστήσει φαινόμενα που εξελίσσονται γραμμικά προς μία κατεύθυνση. Συνήθως αποτελούνται από δύο κόμβους και έχουν την παρακάτω μορφή :



Εικόνα 2.3: Μονοδιάστατο γραμμικό στοιχείο αποτελούμενο από δύο κόμβους

Έστω ένα φαινόμενο που εξελίσσεται γραμμικά το οποίο περιγράφεται από την συνάρτηση :

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x \quad (2.1)$$

Εφόσον υπάρχει γραμμικότητα οι συντελεστές α_1, α_2 θεωρούνται σταθερές , επομένως έχουμε μόνο τον άγνωστο x . Άρα πρέπει να υπολογίζουμε την τιμή του T τις θέσεις A και B. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

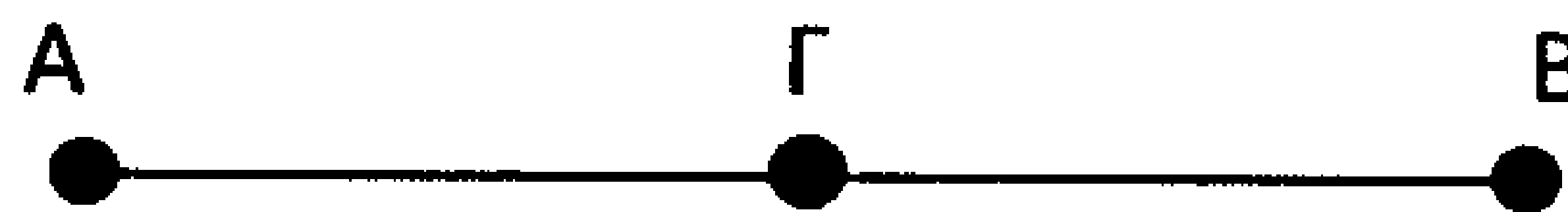
$$T_A = \alpha_1 + \alpha_2 x_A \quad (2.2)$$

$$T_B = \alpha_1 + \alpha_2 x_B \quad (2.3)$$

Επομένως λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν υπολογίζεται η τιμή των α_1 και α_2 . Άρα είναι πλέον εφικτός ο υπολογισμός του μεγέθους T σε κάθε κόμβο. (G.R. Liu and S.S. Quek, 2003)

Μονοδιάστατα τετραγωνικά στοιχεία

Έστω το προηγούμενο φαινόμενο, αλλά η γραμμική αναπαράσταση του παρουσιάζεται με μονοδιάστατο τετραγωνικό στοιχείο αποτελούμενο από τρεις κόμβους με την παρακάτω μορφή :



Εικόνα 2.4: Μονοδιάστατο τετραγωνικό στοιχείο αποτελούμενο από τρεις κόμβους.

Τότε περιγράφεται από την συνάρτηση :

$$T(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \quad (2.4)$$

Εφόσον υπάρχει γραμμικότητα οι συντελεστές α_1, α_2 θεωρούνται σταθερές, επομένως έχουμε μονό τον άγνωστο x . Άρα πρέπει να υπολογίζουμε την τιμή του T τις θέσεις A και B. Έτσι προκύπτουν οι παρακάτω εξισώσεις :

$$T_A = \alpha_1 \quad (2.5)$$

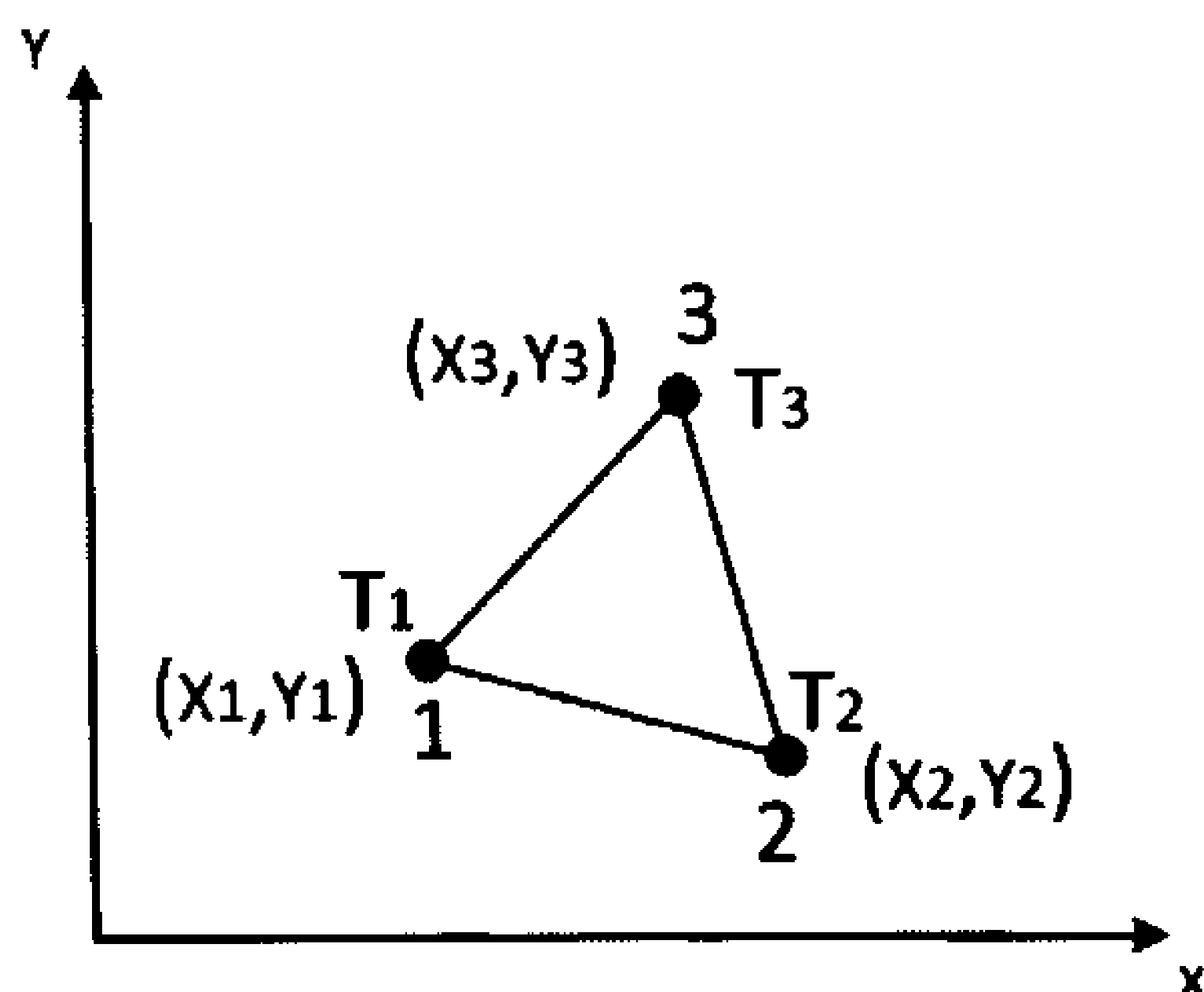
$$T_\Gamma = \alpha_1 + \alpha_2 \left(\frac{AB}{2}\right) + \alpha_3 \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad (2.6)$$

$$T_B = \alpha_1 + \alpha_2 (AB) + \alpha_3 (AB)^2 \quad (2.7)$$

Επομένως λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν υπολογίζεται η τιμή των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και το μέγεθος T μπορεί να υπολογιστεί σε κάθε κόμβο. (G.R. Liu and S.S. Quek, 2003)

Δισδιάστατα γραμμικά τριγωνικά στοιχεία

Στις περιπτώσεις που οι προσεγγίσεις με τα μονοδιάστατα στοιχεία είναι ανεπαρκής, λόγω πολυπλοκότητας του προβλήματος, είναι απαραίτητο να χρησιμοποιηθούν πολυδιάστατες αναλύσεις. Το πιο διαδεδομένο και ευρέως χρησιμοποιούμενο στοιχείο, για την προσομοίωση ακανόνιστων και περίπλοκων επιφανειών με την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων είναι το δισδιάστατο γραμμικό τριγωνικό.



Εικόνα 2.5: Δισδιάστατο γραμμικό τριγωνικό στοιχείο αποτελούμενο από τρεις κόμβους.

Η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το δισδιάστατο γραμμικό τριγωνικό, το οποίο αποτελείται από τρεις κόμβους είναι της μορφής :

$$T(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (2.8)$$

Για κάθε κόμβο ισχύει :

$$T_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \quad (2.9)$$

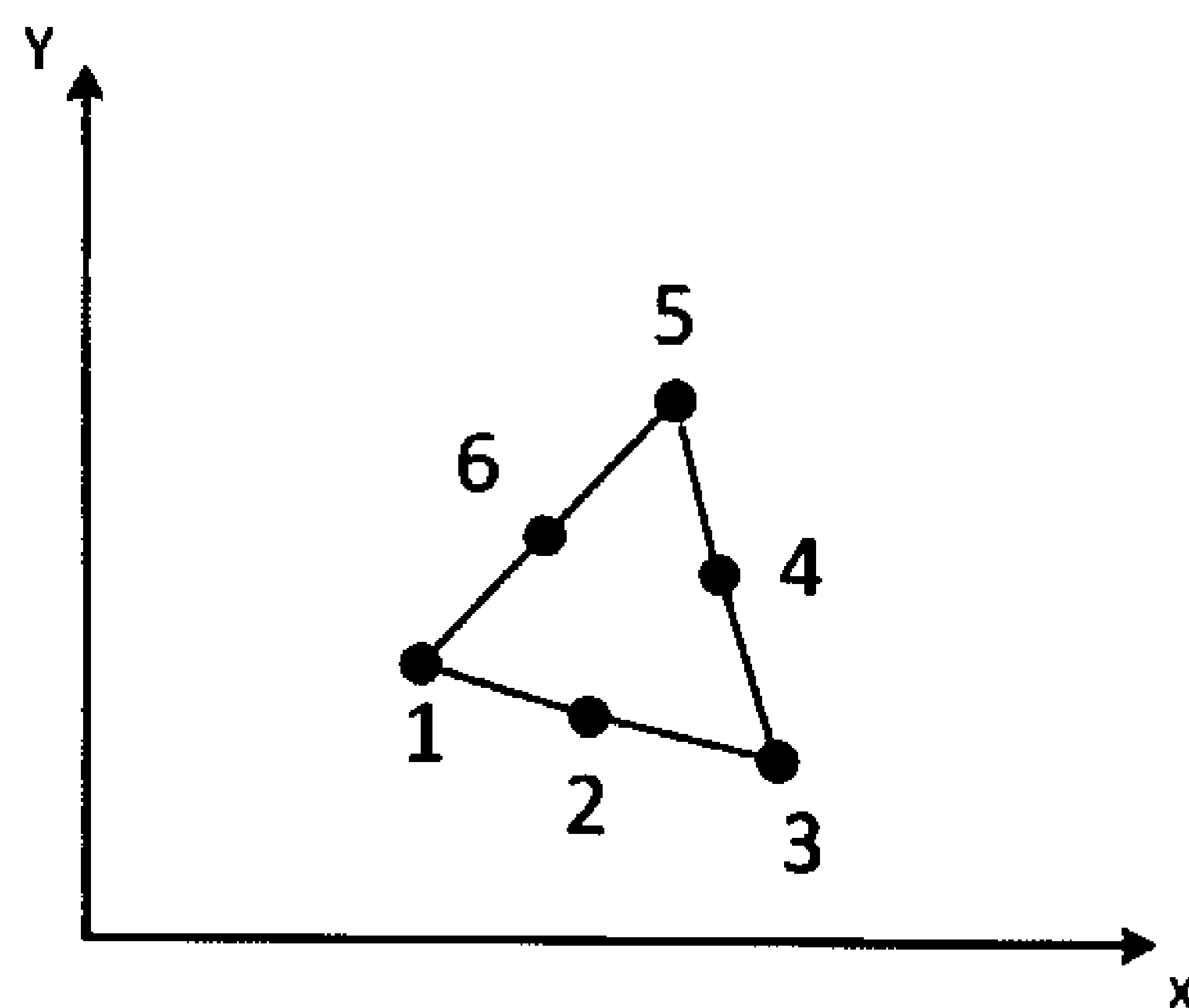
$$T_2 = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \quad (2.10)$$

$$T_3 = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \quad (2.11)$$

Επομένως λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που προέκυψαν υπολογίζεται η τιμή των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ και κατά συνεπεία ο υπολογισμός του μεγέθους T σε κάθε κόμβο είναι πλέον εφικτός. (G.R. Liu and S.S. Quek, 2003, R.W. Lewis, P.Nithiarasu, K.N. Seetharamu, 2004),

Δισδιάστατα τετραγωνοειδή τριγωνικά στοιχεία (με 6, 10 η και παραπάνω κόμβους)

Τα δισδιάστατα τετραγωνοειδή τριγωνικά στοιχεία ουσιαστικά αποτελούν μία ποιο σύνθετη μορφή των δισδιάστατων γραμμικών τριγωνικών στοιχείων. Αποτελούνται από τουλάχιστον έξι κόμβους, ενώ ο αριθμός των κόμβων μπορεί να ξεπερνάει και τους δέκα. Όσο μεγαλώνει ο αριθμός των κόμβων οι συνάρτηση που εκφράζει το τριγωνικό στοιχείο γίνεται όλο και ποιο σύνθετη.



Εικόνα 2.6: Δισδιάστατο τριγωνοειδές τριγωνικό στοιχείο αποτελούμενο από έξι κόμβους

Η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το δισδιάστατο τετραγωνοειδές τριγωνικό στοιχείο , το οποίο αποτελείται από έξι κόμβους είναι της μορφής :

$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 xy \quad (2.12)$$

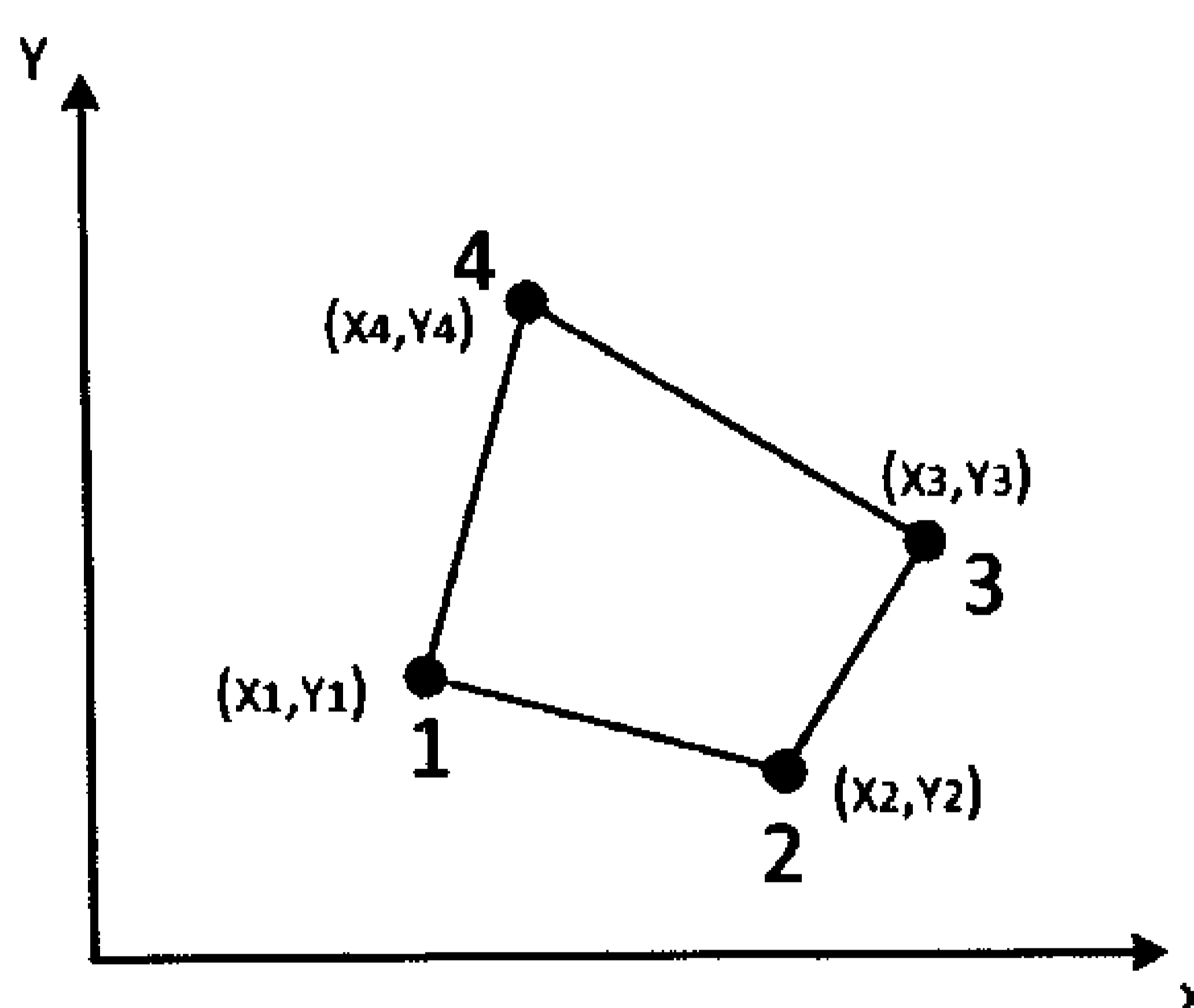
Επομένως για τον πρώτο κόμβο η συνάρτηση θα είναι της μορφής :

$$T_1 = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 y_1^2 + \alpha_6 x_1 y_1 \quad (2.13)$$

Αντίστοιχα οι συναρτήσεις για τους υπόλοιπους κόμβους θα έχουν την ίδια μορφή με τον πρώτο κόμβο. Επομένως λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων που θα προκύψει υπολογίζεται η τιμή των $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$, και επομένως και το μέγεθος T σε κάθε κόμβο. (Liu G.R. and Quek S.S., 2003, Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N., 2004),

Δισδιάστατα τετράπλευρα στοιχεία

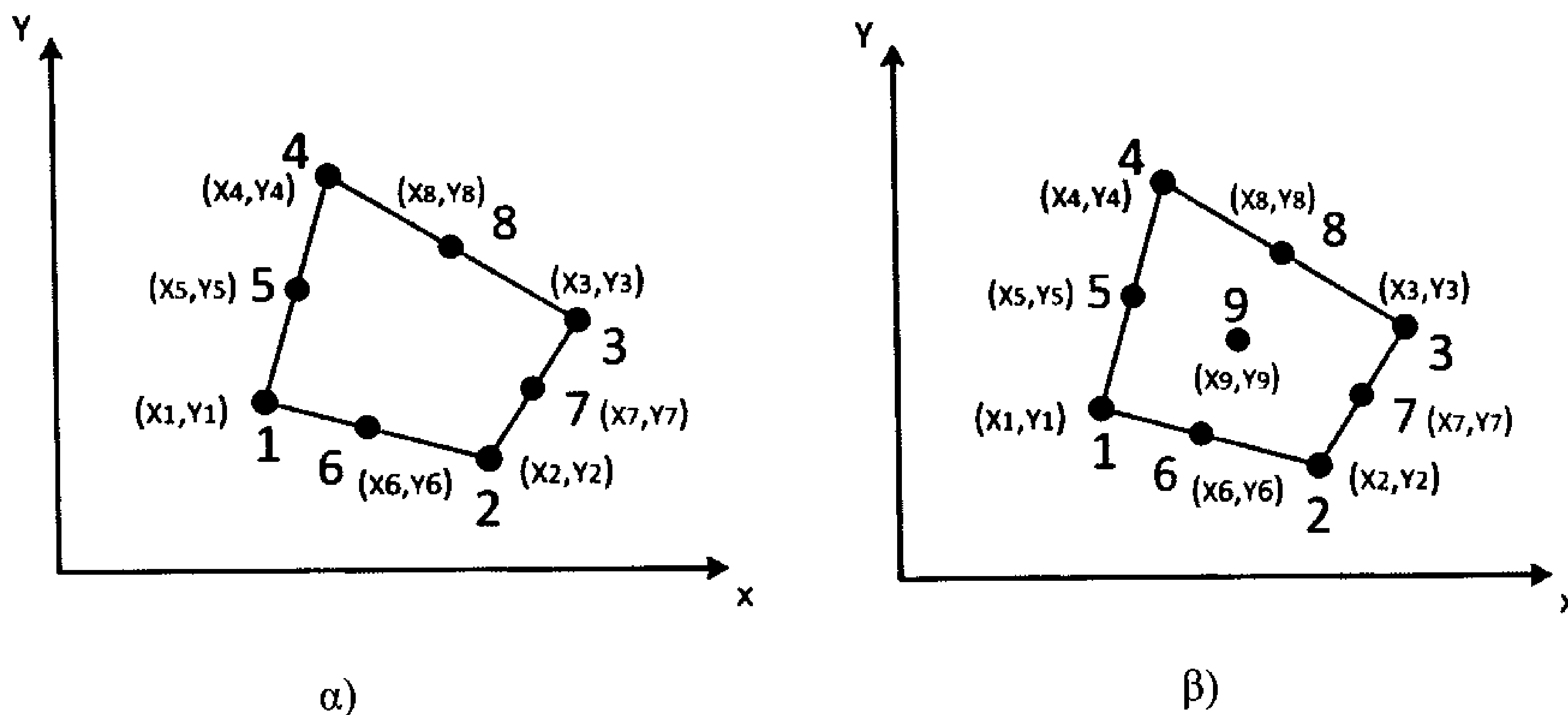
Το δισδιάστατο τετράπλευρο στοιχείο αποτελείται από τέσσερις πλευρές και τέσσερις κόμβους, ένα κόμβο σε κάθε κορυφή. Για την αναπαράσταση ποιο σύνθετων επιφανειών συχνά χρησιμοποιούνται τετράπλευρα με οχτώ και εννιά κόμβους. Σε ένα δικτύωμα με τετράπλευρα στοιχεία, κάθε στοιχείο μπορεί να είναι μοναδικό και διαφορετικό σε σχήμα, δηλαδή να έχει διαφορετικό μήκος σε κάθε πλευρά και με διαφορετική κλίση. Η πιο απλή μορφή του τετράπλευρου στοιχείου είναι το παραλληλόγραμμο. (Liu G.R. and Quek S.S., 2003, Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N., 2004



Εικόνα 2.7: Δισδιάστατο τετράπλευρο στοιχείο αποτελούμενο από τέσσερις κόμβους.

Η συνάρτηση που αντιπροσωπεύει το τετράπλευρο στοιχείο είναι της μορφής :

$$T = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \quad (2.14)$$



Εικόνα 2.8: Δισδιάστατο τετράπλευρο στοιχείο αποτελούμενο α) από οχτώ κόμβους β) από εννιά κόμβους

Τρισδιάστατα στοιχεία :

Με την χρήση τριών διαστάσεων στοιχείων , ο όγκος των δεδομένων που χρειάζεται για να αναπαρασταθεί μια γεωμετρία, καθώς και οι συνοριακές συνθήκες αυτής , αυξάνει πάρα πολύ σε σχέση με τα προβλήματα δύο διαστάσεων, με αποτέλεσμα να αυξάνει και η απαραίτητη υπολογιστική ισχύς λόγω μεγάλης κατανάλωσης μνήμης του συστήματος , άρα αυξάνει και το κόστος και ο χρόνος επίλυσης .

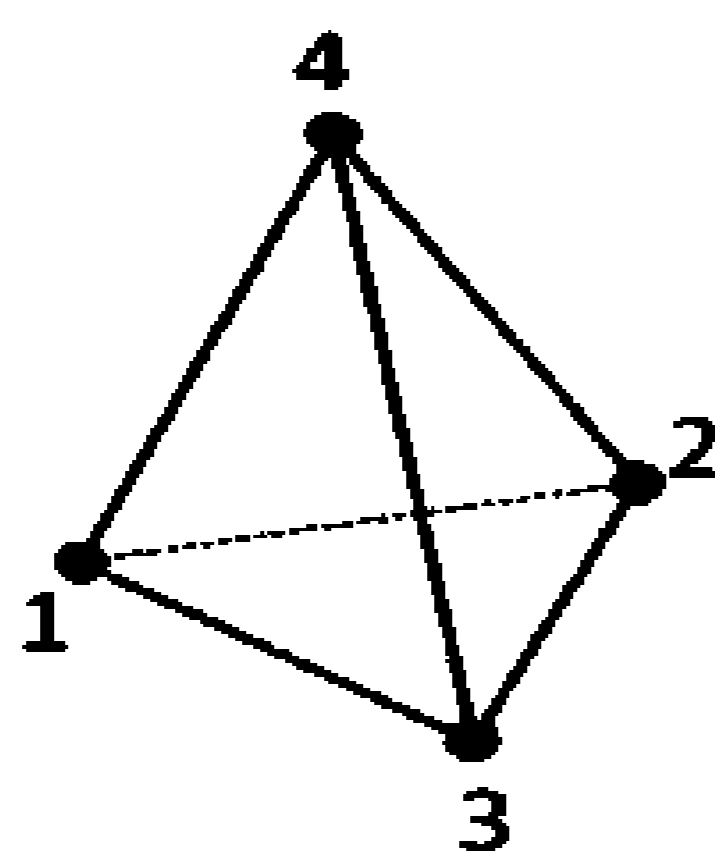
Για αυτό το λόγο θα πρέπει να χρησιμοποιηθούν κατάλληλα στοιχεία. Τα πιο δημοφιλή και πιο συχνά χρησιμοποιούμενα τριών διαστάσεων στοιχεία είναι τα παρακάτω τρία :

- Το τετράεδρο
- Το εξάεδρο
- Το πρίσμα (αλλιώς και εξάεδρο «κομματιασμένου» σχήματος , brick-shaped)

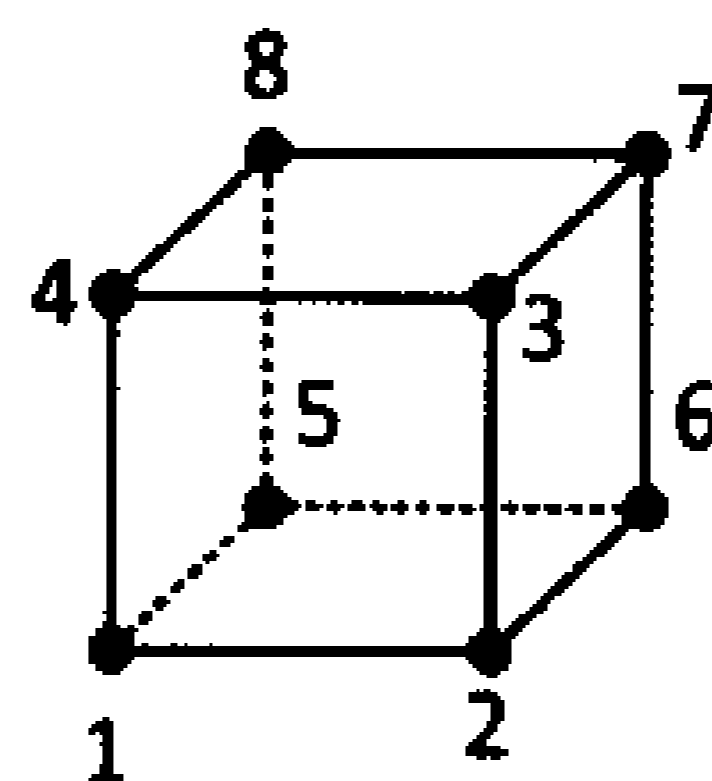
Αυτά τα τρία σχήματα ουσιαστικά αποτελούν προέκταση των δισδιάστατων σχημάτων του γραμμικού τριγώνου και του τετράπλευρου. (Lewis R.W., Nithiarasu P. , Seetharamu K.N., 2004)

Η εξίσωση που περιγράφει ένα τριών διαστάσεων γραμμικό τετράεδρο στοιχείο είναι της μορφής :

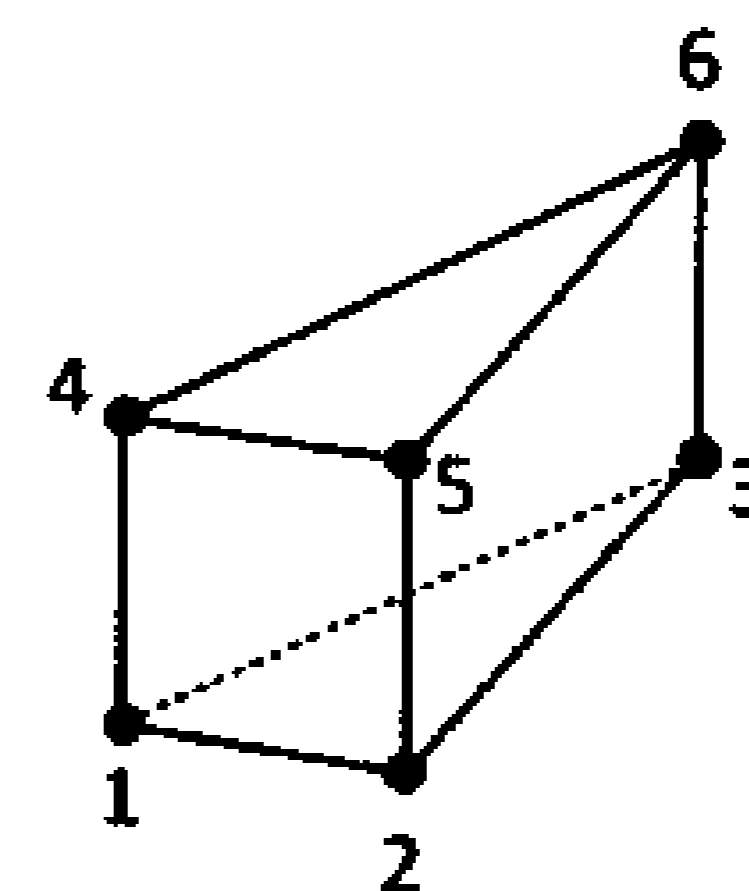
$$T = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z \quad (2.15)$$



α)



β)



γ)

Εικόνα 2.9: Τρισδιάστατα στοιχεία : α) τετράεδρο αποτελούμενο από τέσσερις κόμβους β) εξάεδρο αποτελούμενο από οχτώ κόμβους γ) πρίσμα αποτελούμενο από έξι κόμβους

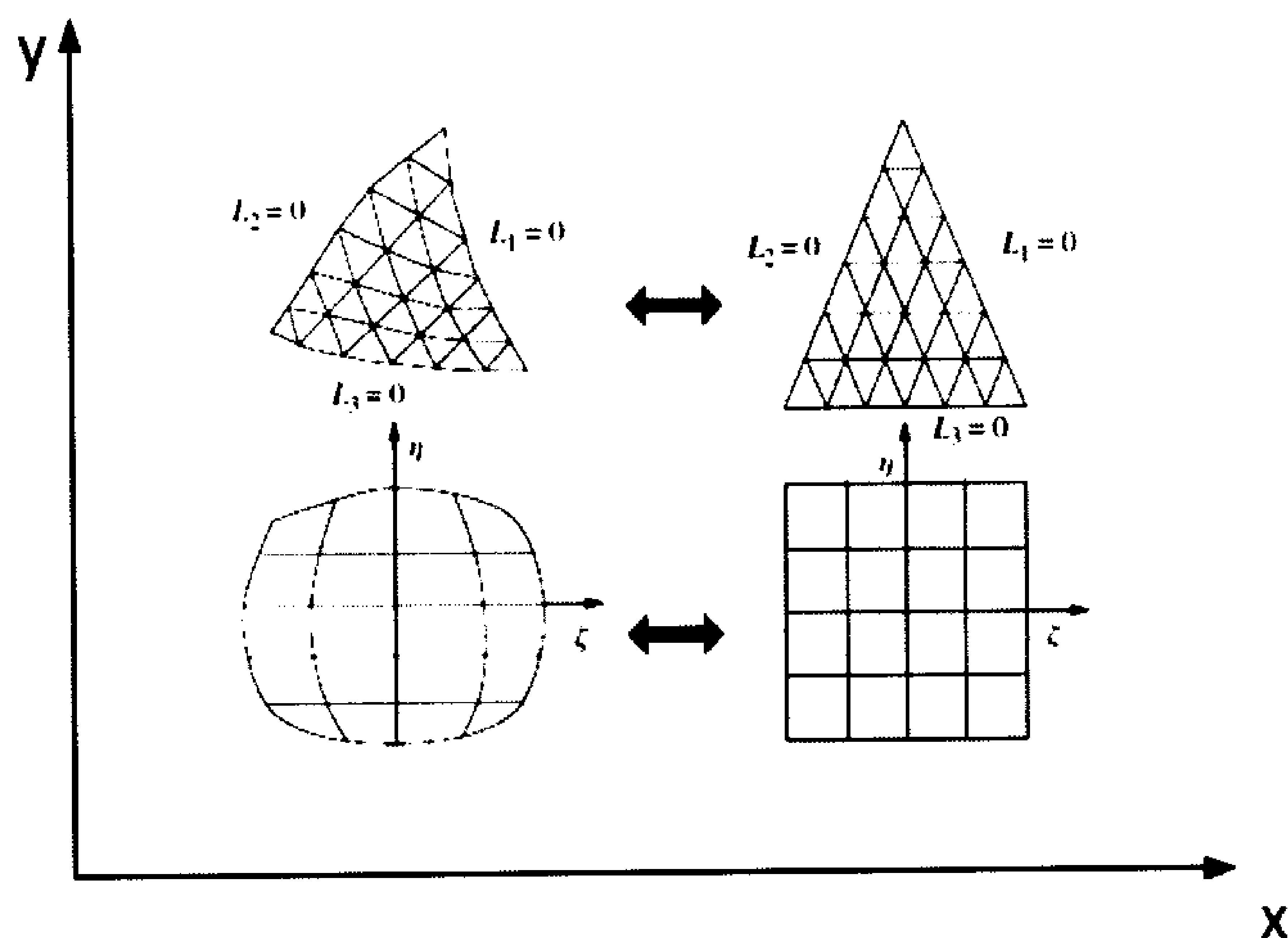
Ισοπαραμετρικά στοιχεία

Σε πολλά προβλήματα με περίπλοκες γεωμετρίες, χρειάζεται να χρησιμοποιηθεί ένας αρκετά μεγάλος αριθμός από στοιχεία με ευθύγραμμες πλευρές, ώστε να αναπαραστήσουν με ακρίβεια την σύνθετη επιφάνεια.

Ο αριθμός των απαραίτητων στοιχείων μπορεί να μειωθεί αρκετά χρησιμοποιώντας στοιχεία με κυρτές πλευρές. Κατά συνέπεια, εφόσον μειώνεται ο αριθμός των χρησιμοποιούμενων στοιχείων, μειώνεται και ο αριθμός των μεταβλητών του συστήματος. Σε περιπτώσεις προβλημάτων με τρεις διαστάσεις, ο συνολικός αριθμός των μεταβλητών του συστήματος είναι παρά πολύ μεγάλος, με αποτέλεσμα να υπάρχει ανάγκη μείωσης των στοιχείων, τα οποία τελικά έχουν επίδραση στην υπολογιστική ισχύ του ηλεκτρονικού υπολογιστή που χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση.

Προκειμένου να παραχθούν στοιχεία με κυρτές πλευρές υπάρχουν διάφορες μέθοδοι, με σημαντικότερη και ευρέως χρησιμοποιούμενη την ισοπαραμετρική χαρτογράφηση (isoparametric mapping) από γνωστά σχήματα.

Με δεδομένο ότι οι συναρτήσεις που εκφράζουν τα γνωστά γεωμετρικά σχήματα είναι γνώστες και οι συναρτήσεις των παραγόμενων κυρτών στοιχείων μπορούν εύκολα να προσδιοριστούν με χρήση ηλεκτρονικού υπολογιστή. (Lewis R.W, Nithiarasu P., Seetharamu K.N., 2004)



Εικόνα 2.10: Ισοπαραμετρική χαρτογράφηση στοιχείων από γνωστά σχήματα.

2. Εύρεση των ιδιοτήτων των στοιχείων.

Αφού γίνει η μοντελοποίηση του προβλήματος για χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων καθορίζονται οι εξισώσεις από μήτρες που καθορίζουν τις ιδιότητες των επιμέρους στοιχείων. Αυτός ο καθορισμός γίνεται με μία από τις τρεις προσεγγίσεις που αναφέρθηκαν παραπάνω, (Liu G.R. and Quek S.S 2003)

3, Συνάθροιση των ιδιοτήτων των στοιχείων για τον καθορισμό των εξισώσεων του συστήματος.

Προκειμένου να βρεθούν οι ιδιότητες του συνολικού συστήματος που μοντελοποιείται από το δίκτυο των στοιχείων πρέπει να «συναθροιστούν» όλες τις ιδιότητες των στοιχείων. Δηλαδή , γίνεται συνδυασμός των μητρών των εξισώσεων από κάθε στοιχείο που τελικά εκφράζει τη συμπεριφορά ολόκληρου του συστήματος. Οι μήτρες με τις εξισώσεις για το σύστημα έχουν την ίδια μορφή με εκείνες για κάθε ένα μεμονωμένο στοιχείο , με διαφορά ότι περιέχουν πολύ περισσότερους όρους, διότι περιλαμβάνουν όλους τους κόμβους. Ένα κύριο χαρακτηριστικό της Μ.Π.Σ είναι ότι οι εξισώσεις του συστήματος παράγονται από τη συνάθροιση όλων των επιμέρους εξισώσεων από κάθε στοιχείο. (Liu G.R. and Quek S.S, 2003)

4, Καθορισμός των οριακών συνθηκών του προβλήματος.

Πριν από την επίλυση των εξισώσεων του συστήματος θα πρέπει να γίνει καθορισμός των οριακών συνθηκών του προβλήματος. Δηλαδή να προσδιοριστούν οι κομβοί του συστήματος που περιέχουν μεταβλητές και αυτοί που δεν περιέχουν μεταβλητές και αποτελούν τις λεγόμενες οριακές συνθήκες του προβλήματος. (G.R. Liu G.R. and Quek S.S, 2003)

5. Επίλυση εξισώσεων του συστήματος.

Η διαδικασία επίλυσης των εξισώσεων του συστήματος δίνει μια σειρά από εξισώσεις έτσι ώστε να μπορούν να υπολογιστούν οι άγνωστες τιμές των μεταβλητών σε κάθε κόμβο του προβλήματος. Ανάλογα από το είδος του προβλήματος ,σταθερής κατάστασης η μεταβλητής θα πρέπει να γίνει μια σειρά επιλύσεων γραμμικών ή μη γραμμικών αλγεβρικών ή διαφορικών εξισώσεων. (Liu G.R. and Quek S.S 2003)

6. Επιπρόσθετοι υπολογισμοί.

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε τη λύση των εξισώσεων του συστήματος για τον υπολογισμό και άλλων σημαντικών παραμέτρων του προβλήματος. Έτσι επιτυγχάνουμε μια πιο αποδοτική και ακριβή προσέγγιση της επίλυσης του προβλήματος.

Γενικά η διαδικασία υπολογισμού και επίλυσης ενός προβλήματος μηχανικής με την χρήση αριθμητικών μεθόδων ανάλυσης μπορεί να περιγραφθεί από τον παρακάτω αλγόριθμο ο οποίος αποτελείται από τρία βασικά βήματα και περιλαμβάνει τα εξής :

Βήμα 1^ο :

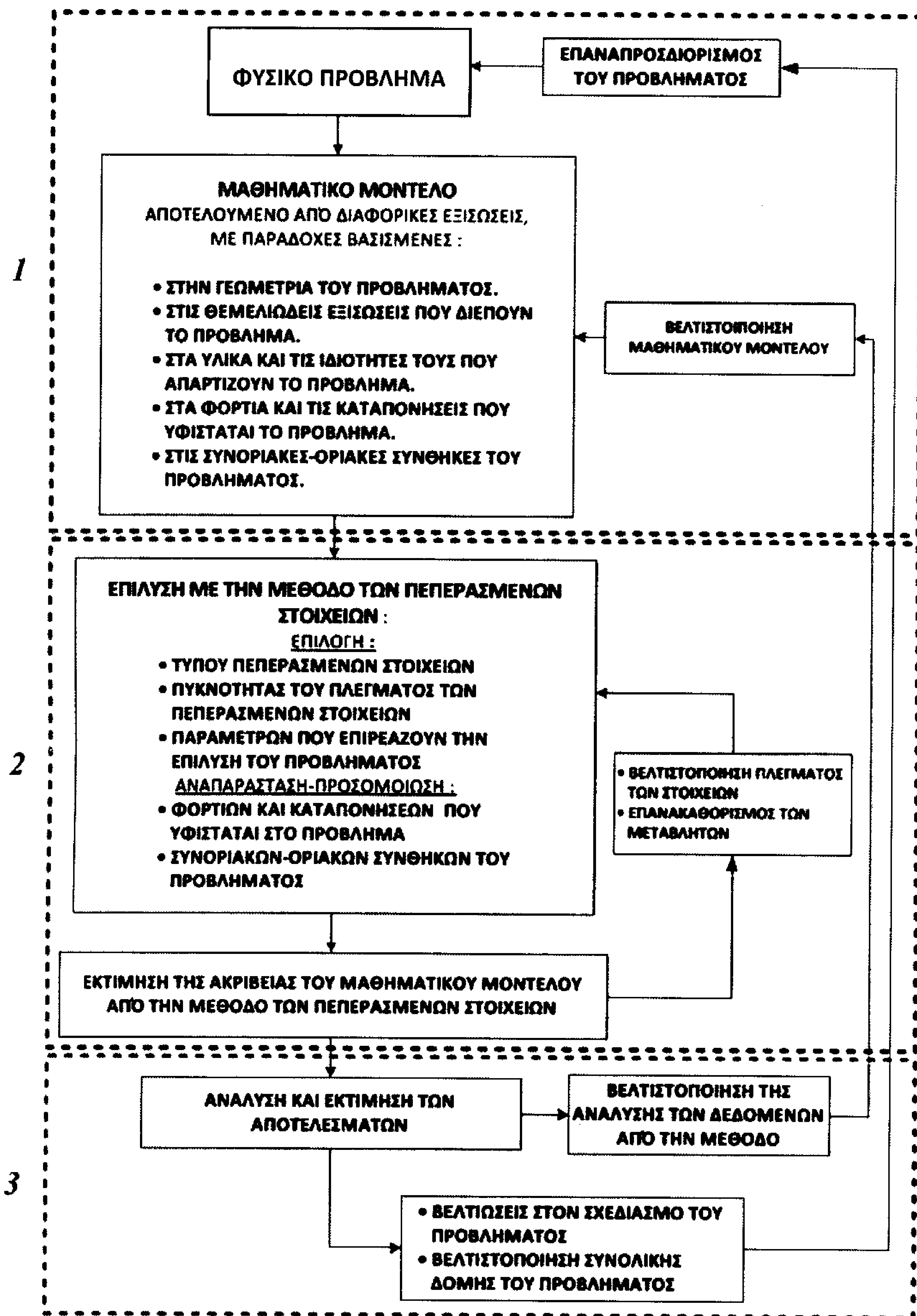
Καταγραφή του προβλήματος μηχανικής και προσδιορισμός του μαθηματικού μοντέλου αποτελούμενο από τις διαφορικές εξισώσεις που το περιγράφουν. Οι εξισώσεις αυτές προκύπτουν από διάφορες παραδοχές όπως , η γεωμετρία του προβλήματος ,τα υλικά και οι ιδιότητες τους , τα φορτία , οι συνοριακές συνθήκες , αλλά και θεμελιώδεις εξισώσεις που διέπουν το πρόβλημα.

Βήμα 2^ο :

Επίλογή της μεθόδου επίλυσης , για παράδειγμα η μέθοδος των πεπερασμένων στοιχείων, του τύπου των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν όπως τριγωνικά στοιχεία , την ρύθμιση των ιδιοτήτων των στοιχείων και το πόσο πυκνό θα είναι το δικτύωμα των στοιχείων (mesh), ρύθμιση των παραμέτρων και των συνοριακών συνθηκών που επηρεάζουν την επίλυση του προβλήματος. Εκτίμηση της ακρίβειας του μαθηματικού μοντέλου.

Βήμα 3^ο :

Ανάλυση και εκτίμηση των αποτελεσμάτων της ανάλυσης της μεθόδου , βελτιστοποίηση του πλέγματος των στοιχείων αλλάζοντας το μέγεθος των στοιχείων, βελτιώσεις στην ανάλυση των στοιχείων του πλέγματος.

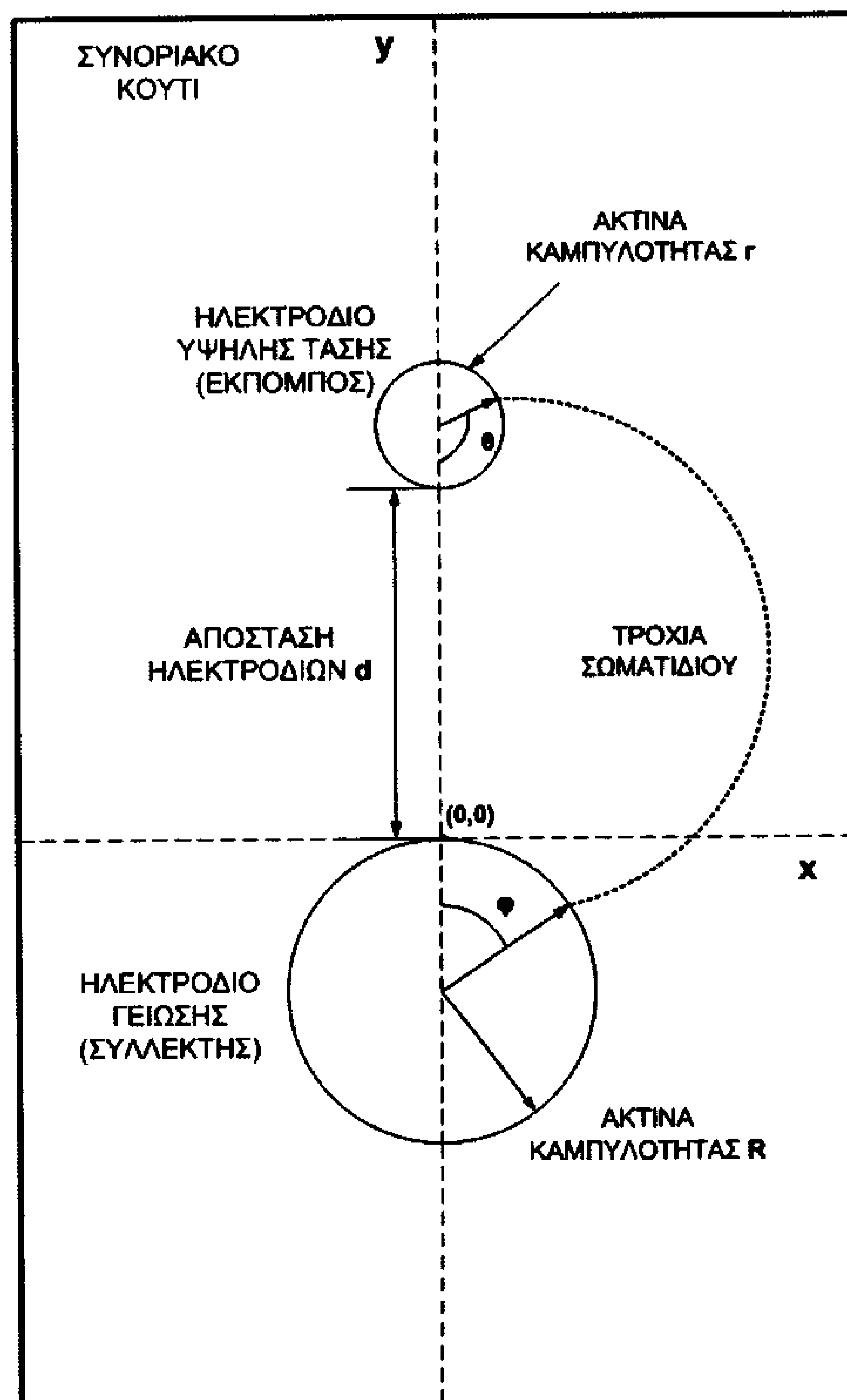


Εικόνα 2.11 : Βασικά στάδια επίλυσης ενός προβλήματος μηχανικής σε μορφή αλγόριθμου με χρήση της αριθμητικής μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων.

Κεφάλαιο 3 : Εφαρμογή της Μ.Π.Σ.

3.1 Γεωμετρικό μοντέλο.

Λόγω του μεγάλου ενδιαφέροντος που υπάρχει σε πρόσφατες βιβλιογραφικές πηγές (Schmid H.J, Stolz S, Buggisch H, 2002, Martins A.A, Pinheiro M.J. 2011) , η εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έγινε στην παρακάτω διάταξη ηλεκτροδίων (εικόνα 3.1) η οποία και καλύπτει: από γεωμετρίες σύρματος – κυλίνδρου διαφορετικής ακτίνας καμπυλότητας και απόστασης μεταξύ τους, και η οποία δεν έχει μελετηθεί επαρκώς στη βιβλιογραφία, μέχρι γεωμετρίες δύο παράλληλων κυλινδρικών αγωγών, όπου το ηλεκτρικό πεδίο είναι συμμετρικά κατανομημένο και έχει αναλυθεί εκτενώς στη βιβλιογραφία (Kuffel E., Zaengl W.S, Kuffel J., 2000 , Peek F.W, 1915)



Εικόνα 3.1 : Γεωμετρία διάταξης ηλεκτροδίων για μοντελοποίηση

Για την μοντελοποίηση της γεωμετρίας των ασύμμετρων ηλεκτροδίων έγινε χρήση του προγράμματος μοντελοποίησης Comsol Multiphysics 4 , το οποίο χρησιμοποιεί την μέθοδο των πεπερασμένων στοιχείων. Το πρόγραμμα, έχει την δυνατότητα να προσομοιώσει πολλά είδη φυσικής και μηχανικής σε μία ,δύο και τρεις διαστάσεις όπως :

- Ηλεκτρομαγνητικά/ηλεκτροστατικά πεδία
- Φαινόμενα ακουστικής
- Χημικά φαινόμενα
- Φαινόμενα ρευστομηχανικής
- Μετάδοσης θερμότητας
- Πλάσμα
- Ραδιοφωνικές συχνότητες
- Διάφορες καταπονήσεις μηχανικής
- Μαθηματικές εφαρμογές

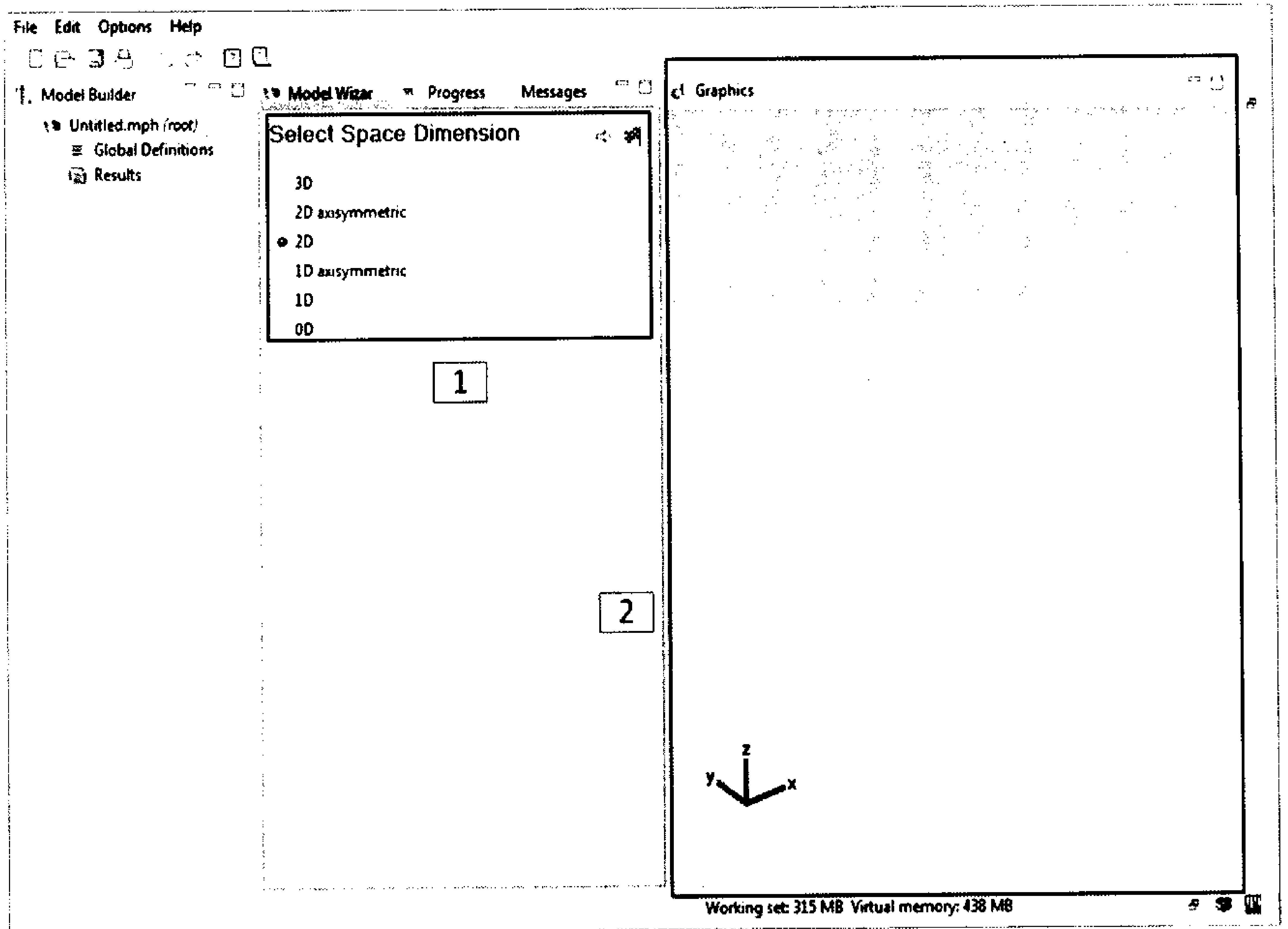
Ακόμα υπάρχει η δυνατότητα συνδυασμού δύο η περισσότερων ειδών φυσικής προκειμένου να προσομοιωθεί με μεγαλύτερη ακρίβεια το φαινόμενο που μας ενδιαφέρει.

3.2 Ρυθμίσεις λογισμικού.

Παρακάτω περιγράφεται η διαδικασία των απαραίτητων ρυθμίσεων που έγιναν μέσω του interface του προγράμματος προκειμένου να δημιουργηθεί το γεωμετρικό μοντέλο της διάταξης των ηλεκτροδίων που περιγράφεται στο κεφάλαιο 3.1.

Αρχικά θα πρέπει να επιλέξουμε τον αριθμό των διαστάσεων που θα χρησιμοποιήσουμε . Υπάρχει η δυνατότητα επιλογής :

- Μίας διάστασης
- Δύο διαστάσεων
- Τριών διαστάσεων

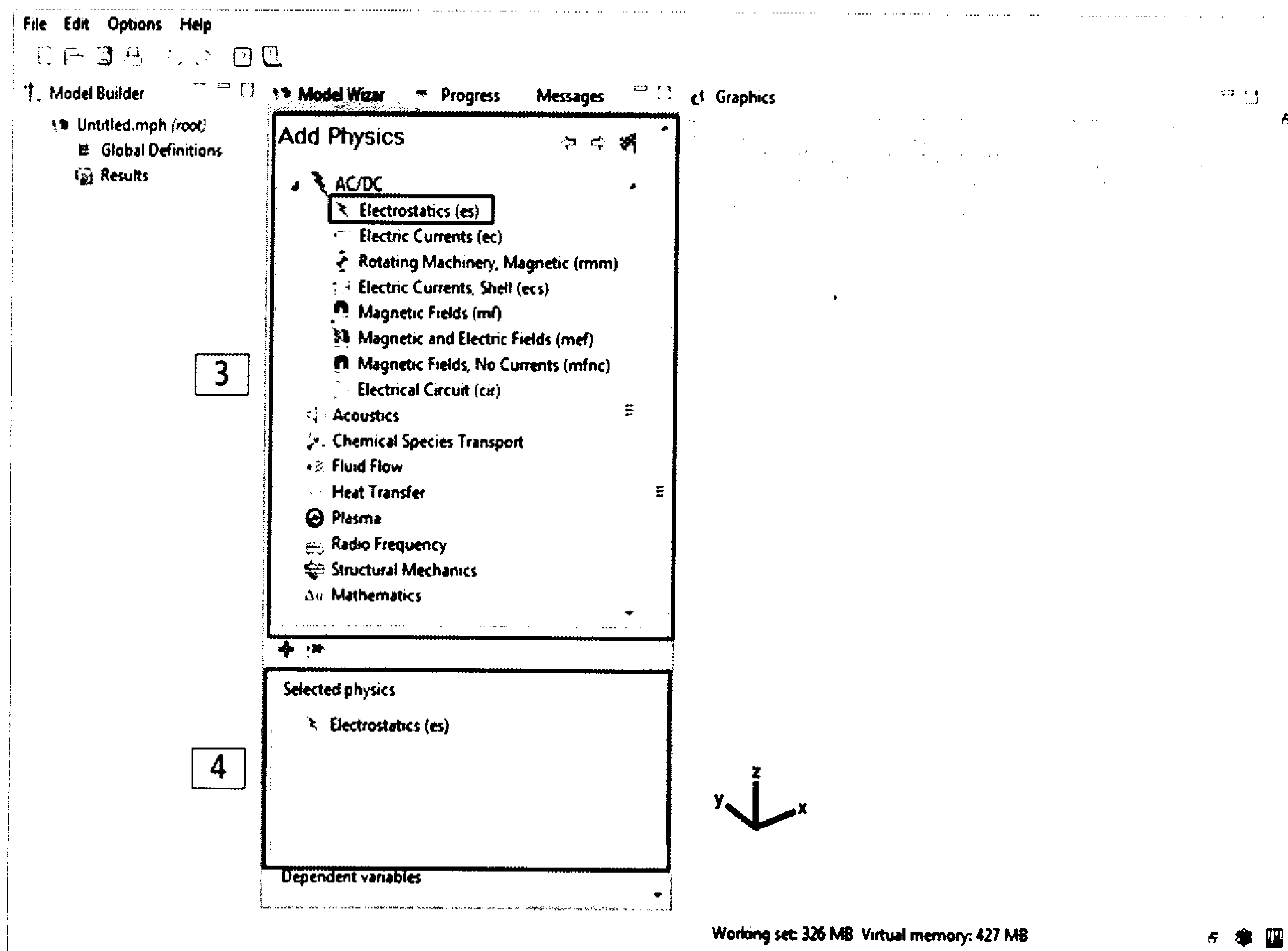


Εικόνα 3.2 : Επιλογή αριθμού διαστάσεων ανάλυσης

1. Επιλογή του αριθμού των διαστάσεων.
2. Αυτόματη δημιουργία αξόνων αναφοράς x,y,z από το πρόγραμμα.

Γίνεται επιλογή των δύο διαστάσεων, επομένως οι άξονες αναφοράς θα είναι οι x,y. Στη συνέχεια γίνεται επιλογή του είδους της φυσικής που θα χρησιμοποιηθεί. Εφόσον θέλουμε να προσομοιώσουμε την συμπεριφορά του ηλεκτρικού πεδίου, επιλέγουμε την φυσική AC/DC και την υποκατηγορία electrostatics, καθώς το πεδίο μας είναι ηλεκτροστατικό.

Αφού επιλέξουμε την φυσική το πρόγραμμα καταχωρεί την επιλογή μας στο selected physics.

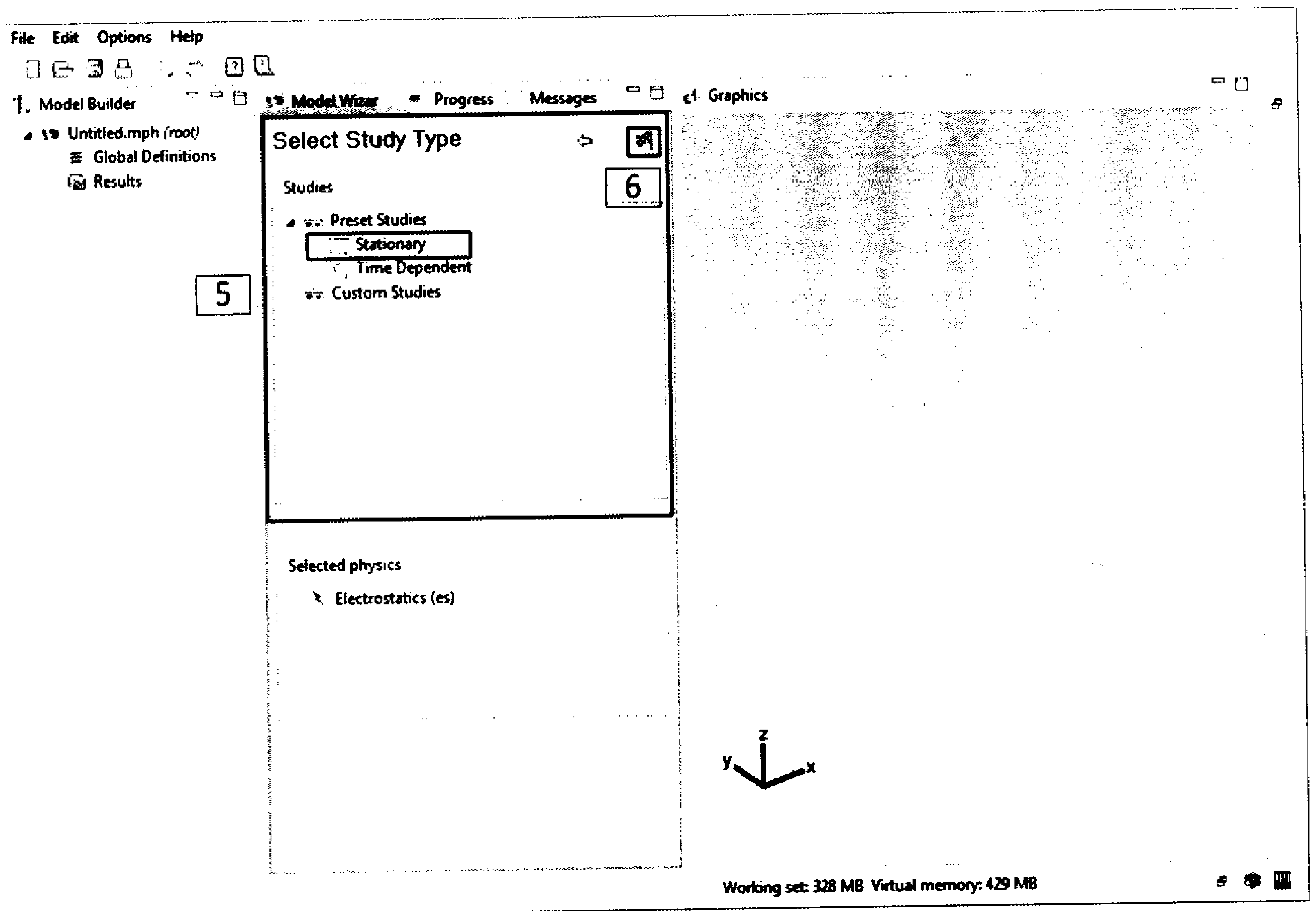


Εικόνα 3.3 : Επιλογή φυσικής , επιλογή electrostatics.

3. Επιλογή φυσικής (add physics) AC/DC και επιλογή υποκατηγορίας electrostatics.
4. Αυτόματη καταχώρηση της επιλεγμένης φυσικής από το πρόγραμμα.

Έπειτα επιλέγουμε το είδος της ανάλυσης , εάν θα είναι συναρτήσει του χρόνου η ανεξάρτητη.

Η ανάλυσή θα είναι ανεξάρτητη του χρόνου επομένως θα επιλεχθεί η στατική ανάλυση.



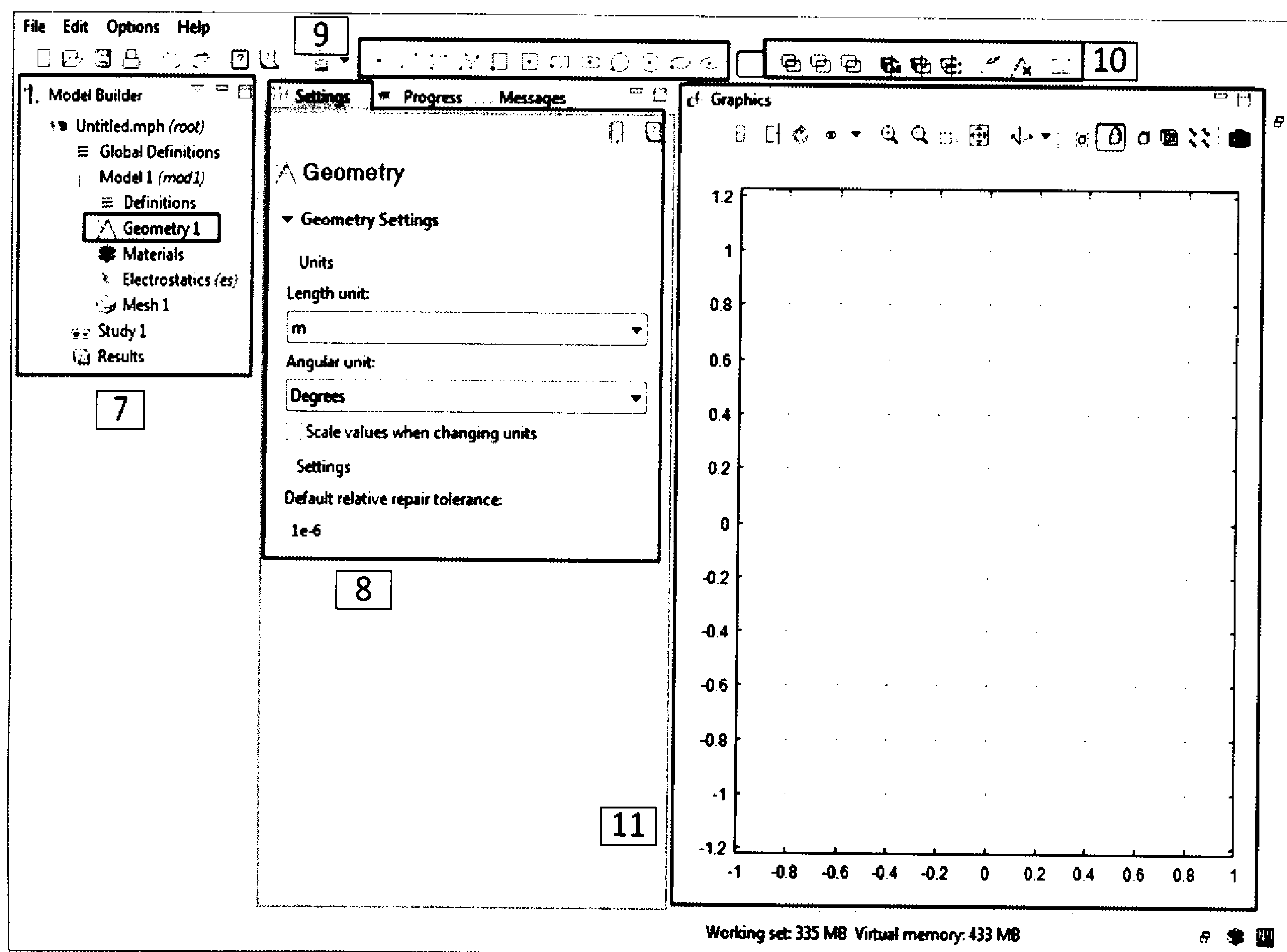
Εικόνα 3.4 : Επιλογή είδους ανάλυσης, στατική ανεξάρτητη του χρόνου

5. Επιλογή ανάλυσης (select study type) , stationary
6. Αποθήκευση επιλογών και εκκίνηση του οδηγού δημιουργίας του μοντέλου

Εκκίνηση οδηγού δημιουργίας μοντέλου.

Ο οδηγός δημιουργίας μοντέλου περιλαμβάνει :

- Το κύριο menu με τον model builder
- Το πεδίο των ρυθμίσεων για διάφορες παραμέτρους τις γεωμετρίας
- Τα διαθέσιμα γεωμετρικά σχήματα και διάφορες λειτουργίες για την επεξεργασία τους
- Το παράθυρο γραφικών για την δημιουργία του μοντέλου.



Εικόνα 3.5 : Εκκίνηση οδηγού δημιουργίας μοντέλου.

7. Menu model builder: περιλαμβάνει όλες τις παραμέτρους που είναι αναγκαίες για

την δημιουργία του μοντέλου όπως :

- Το πεδίο με τις ρυθμίσεις των βασικών χαρακτηριστικών του μοντέλου (definitions)
- Τη γεωμετρία (geometry)
- Τα υλικά του μοντέλου (materials)
- Την φυσική που θα χρησιμοποιηθεί (electrostatics)
- Το δικτύωμα των στοιχείων (mesh)
- Την ανάλυση (study)
- Τα αποτελέσματα (results)

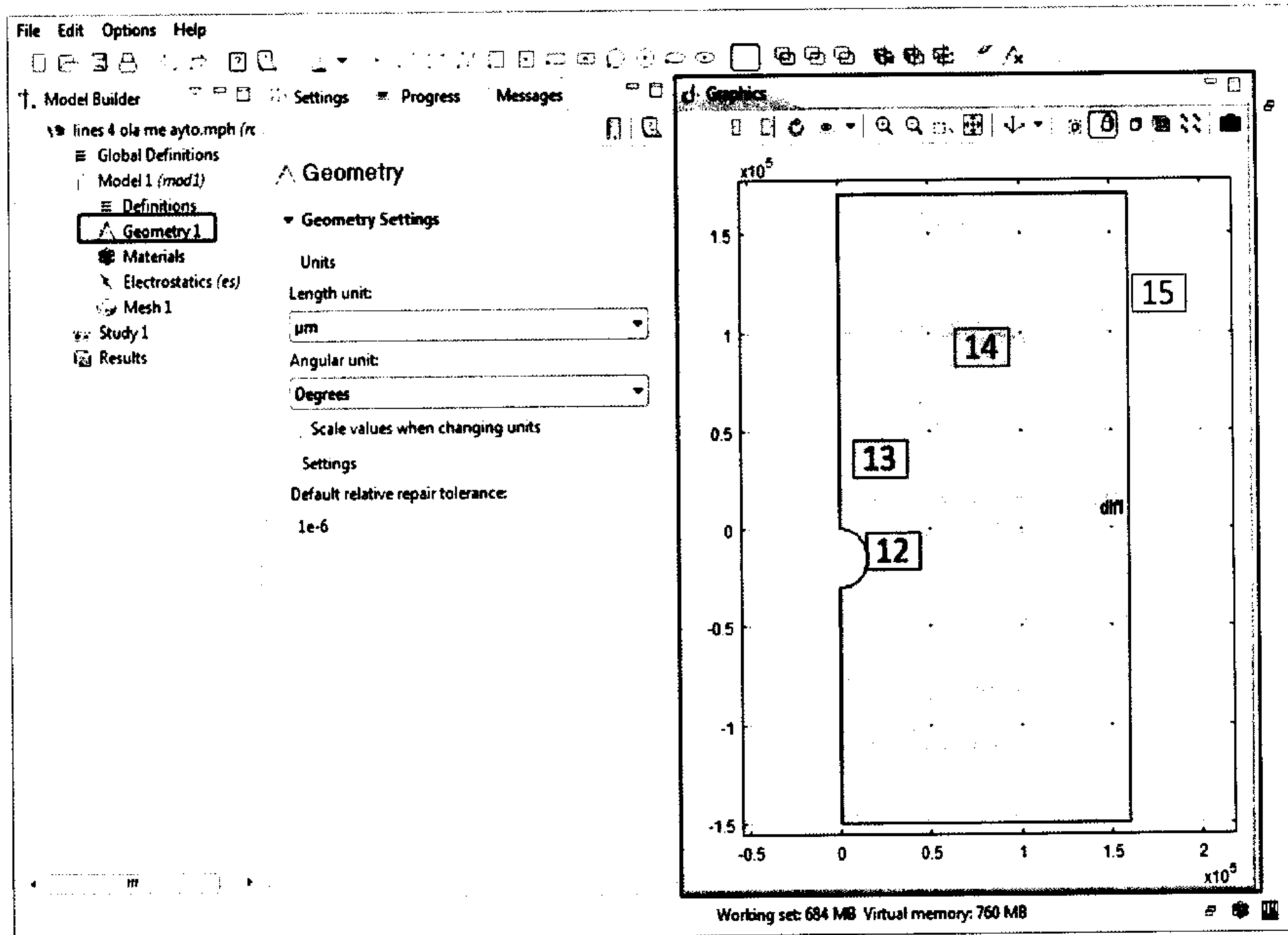
8. Το πεδίο των ρυθμίσεων (settings)

Με επιλεγμένο το geometry στον model builder επιλεγμένο μπορούμε να ρυθμίσουμε την μονάδα μέτρησης μηκών για τον σχεδιασμό της γεωμετρίας και την μορφή που θα έχουν τα τριγωνομετρικά χαρακτηριστικά της μοίρες η ακτίνια

9. Menu επιλογής γεωμετρικού σχήματος , κύκλου παραλληλόγραμμου , τετραγώνου , γραμμών , καμπυλών κ.α

10. Εργαλεία επεξεργασίας γεωμετρικών σχημάτων, όπως τόμη κοινών σημειώνένωση σχημάτων κ.α

11. Παράθυρο γραφικών (graphics), το οποίο αποτελεί το παράθυρο που θα σχεδιαστεί η γεωμετρία.



Εικόνα 3.6 : Εισαγωγή ιδιοτήτων των γεωμετρικών χαρακτηριστικών

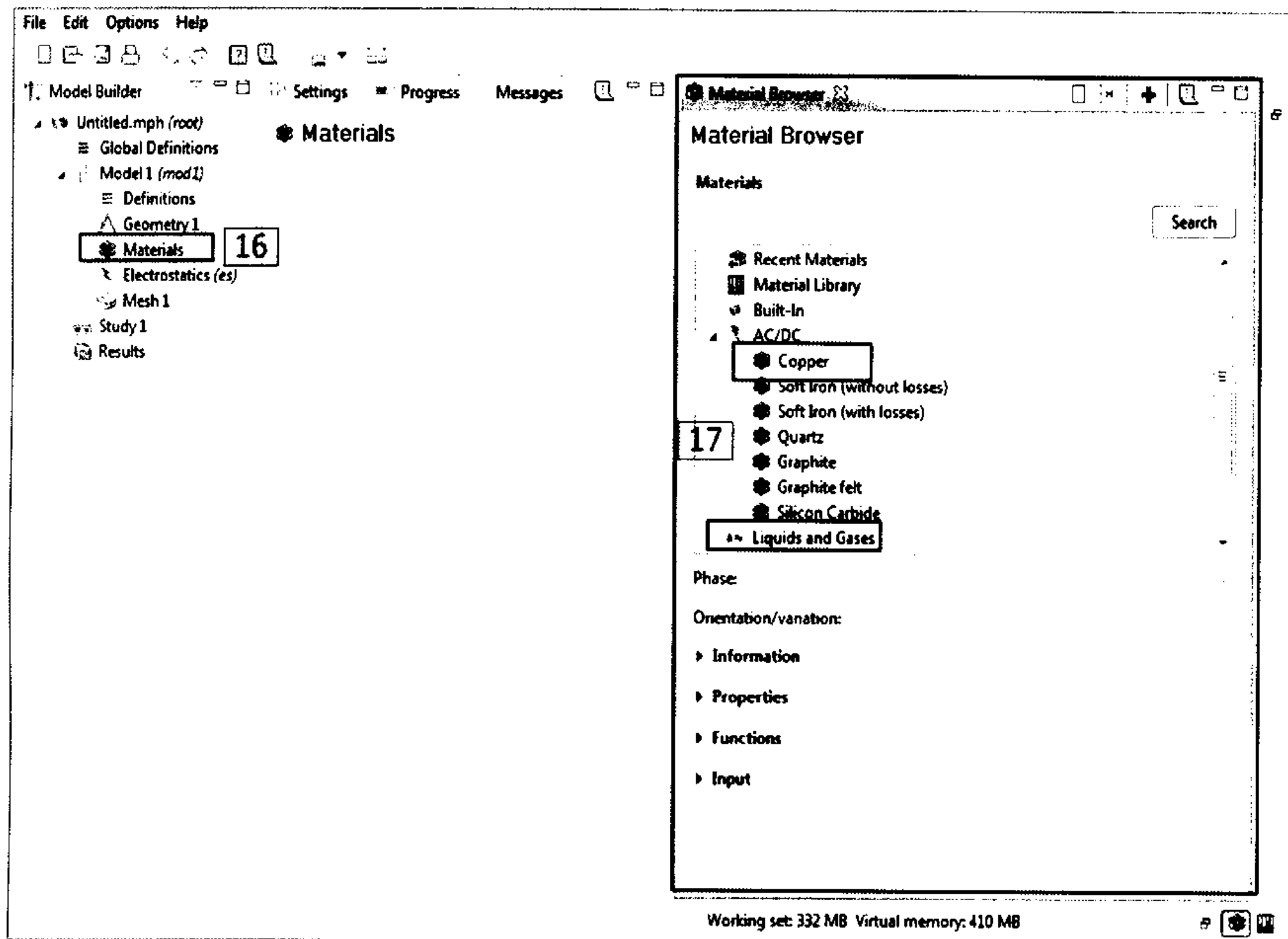
12. Ηλεκτρόδιο γείωσης (0 volts)

13. Ηλεκτρόδιο υψηλής τάσης (1000 volts)

14. Διηλεκτρικό μέσο (αέρας)

15. Συνοριακό κουτί

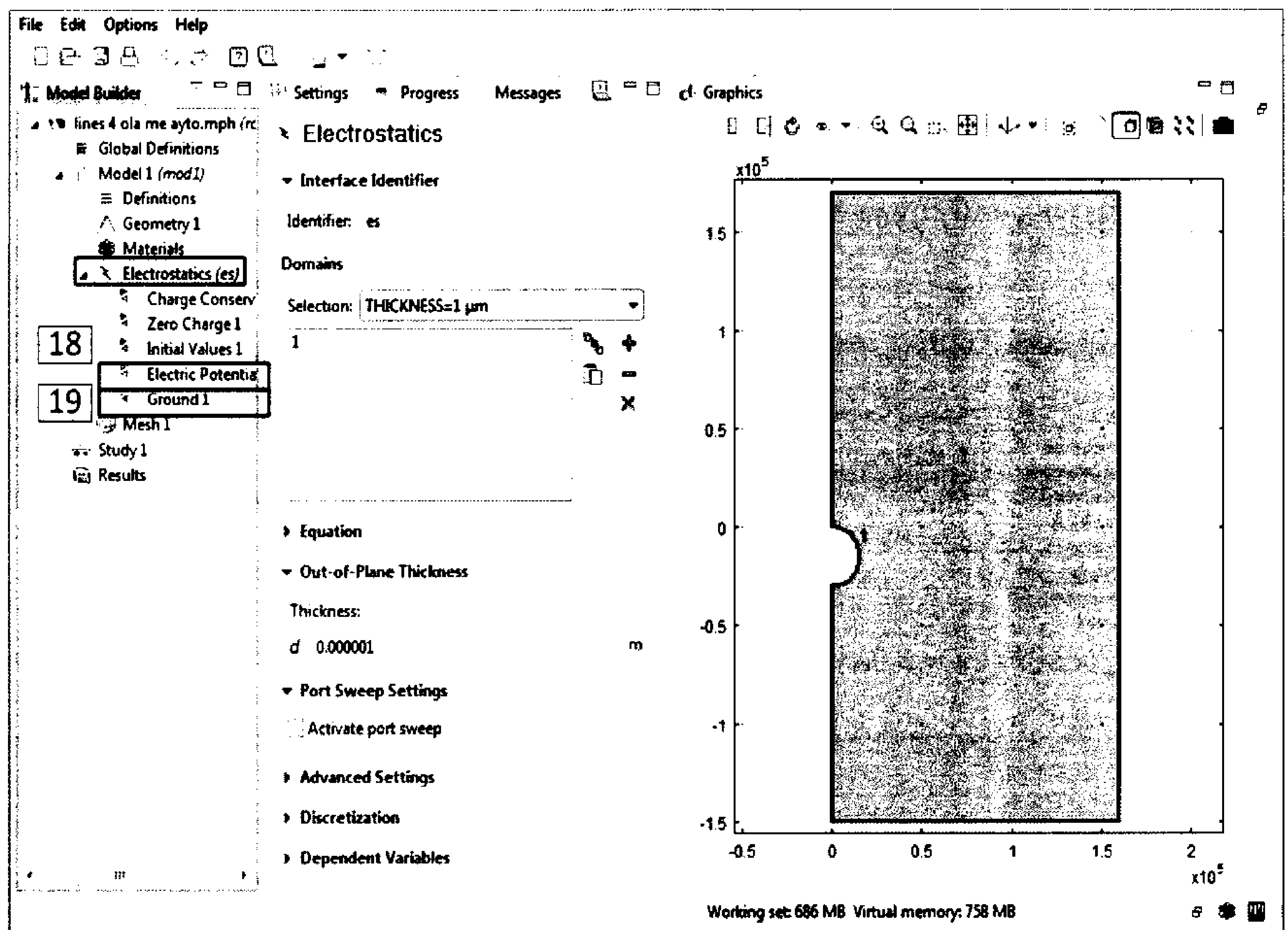
Αφού έχει σχεδιαστεί η γεωμετρία επιλέγουμε στον model builder την κατηγορία materials προκειμένου να εισάγουμε τα υλικά της γεωμετρίας μας . Η εισαγωγή γίνεται από το παράθυρο material browser . Γενικά υπάρχει μια μεγάλη γκάμα υλικών , από την οποία τελικά επιλέγουμε τα υλικά χαλκό και αέρα.



Εικόνα 3.7 : Επιλογή των υλικών των ηλεκτροδίων και της διάταξης

16. Επιλογή στον model builder της κατηγορίας materials
17. Επιλογή από την βιβλιοθήκη υλικών, χαλκού και αέρα

Έχοντας ολοκληρωθεί η επιλογή των υλικών, επιλέγουμε στον model builder την κατηγορία με την φυσική (electrostatics), προκειμένου να εισάγουμε τα δυναμικά στα ηλεκτρόδια (1000V & 0 V)



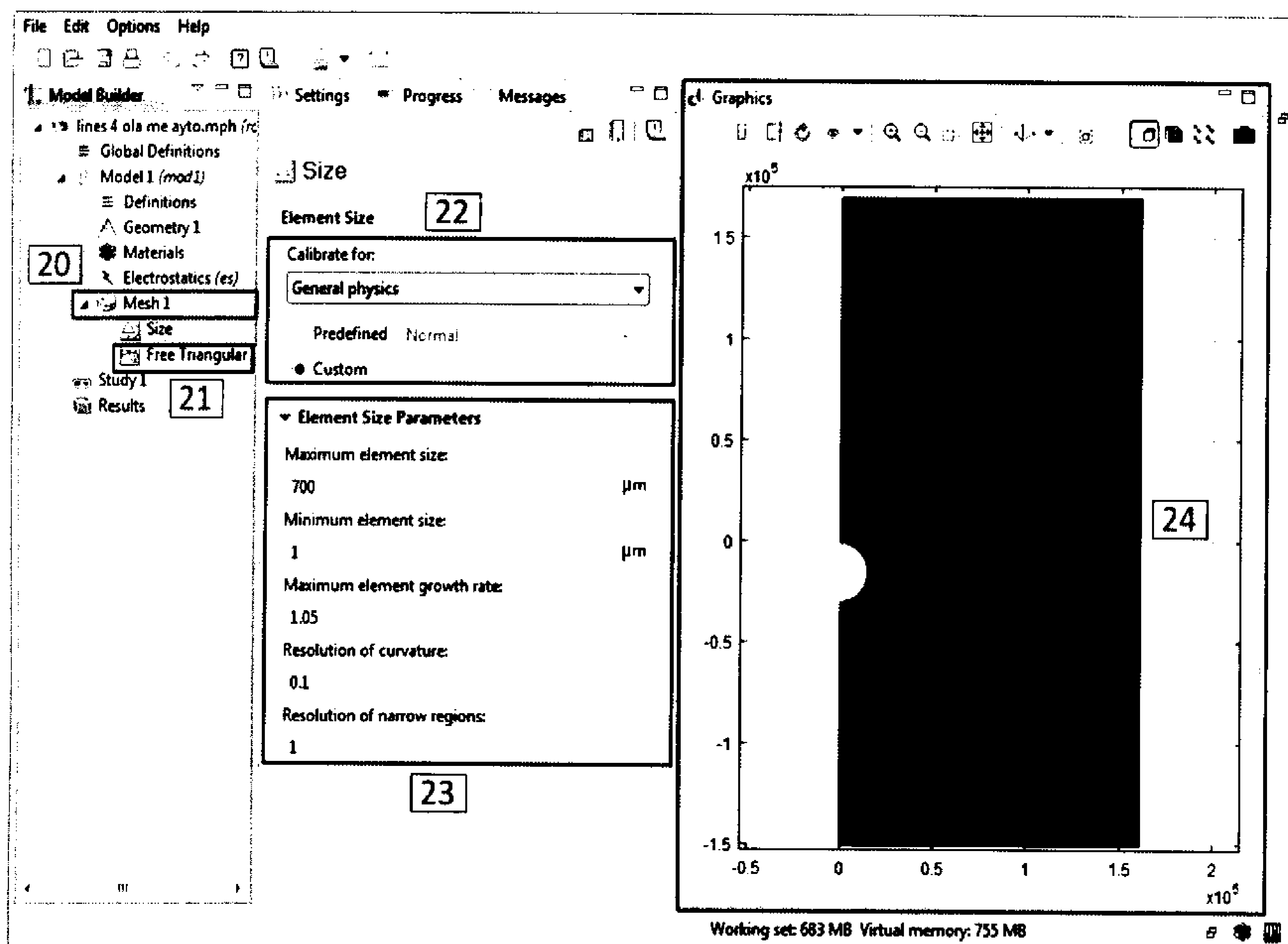
Εικόνα 3.8 : Εισαγωγή δυναμικού στα ηλεκτρόδια

18. Εισαγωγή δυναμικού , υψηλή τάση 1000V

19. Εισαγωγή δυναμικού , γείωση 0V

Επόμενο βήμα είναι να δημιουργηθεί το δικτύωμα των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν για την εφαρμογή της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων. Η επιλογή τους θα πρέπει να γίνει προσεκτικά ώστε να αναπαρασταθεί με ακρίβεια η γεωμετρία και να δημιουργηθούν όσον τον δυνατόν περισσότερα στοιχεία γίνεται και κατά συνέπεια περισσότεροι κόμβοι. Όσο ποιο πολλοί κόμβοι δημιουργηθούν τόσο μεγαλύτερη ακρίβεια κα αξιοπιστία θα έχουν τα αποτελέσματα.

Επιλεγούμε στον model builder την κατηγορία mesh με σκοπό να επιλέξουμε τα χαρακτηριστικά και το είδος των στοιχείων που θα χρησιμοποιηθούν :



Εικόνα 3.9 : Εισαγωγή των ιδιοτήτων των στοιχείων για τη δημιουργία του πλέγματος των στοιχείων

20. Επιλογή καρτέλας mesh

21. Επιλογή του είδους των στοιχείων τρίγωνο τετράπλευρο κ.α (triangular, quadrilateral)

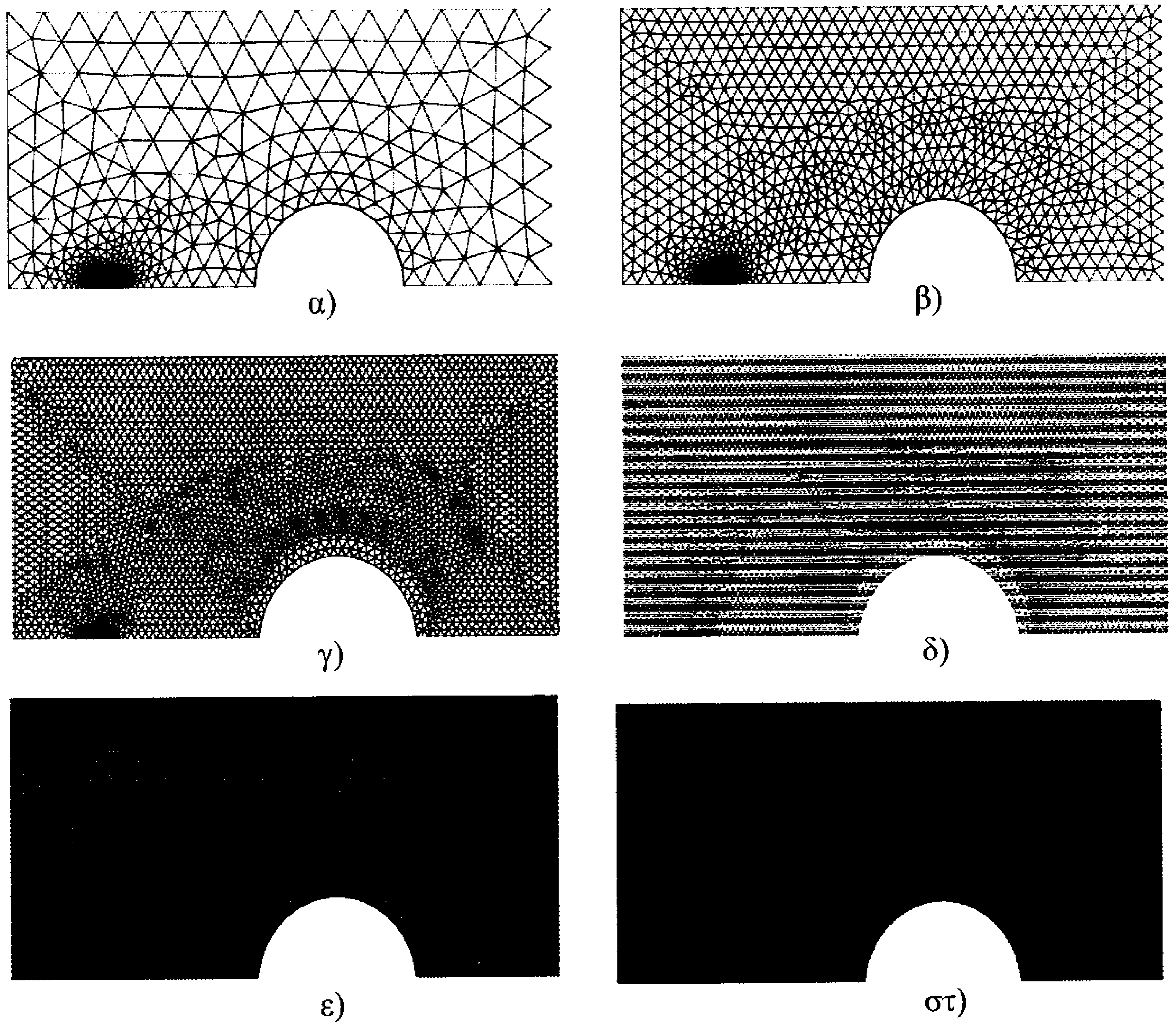
22. Επιλογή του είδους της φυσικής της μηχανής του προγράμματος για την παραγωγή των στοιχείων γενική, ρευστομηχανική, πλάσμα (general physics, fluid dynamics, plasma)

23. Επιλογή παραμέτρων των στοιχείων :

- μέγιστου και ελάχιστου μεγέθους κάθε στοιχείου (maximum, minimum element size)
- Τον μέγιστο συντελεστή ανάπτυξης των στοιχείων (maximum element growth size)
- Της ανάλυσης σε κυρτές επιφάνειες ,όπως στα ηλεκτρόδια, (resolution on curvature)
- Της ανάλυσης σε στενές περιοχές (resolution on narrow regions)

24. Απεικόνιση του πλέγματος mesh των στοιχείων

Προβολή του πλέγματος των στοιχείων (mesh) για διαφορετικά μεγέθη των τριγωνικών στοιχείων,



Εικόνα 3.10: Πλέγμα στοιχείων μοντελοποίησης για διαφορετικά μεγέθη τριγωνικών στοιχείων : **α)** μέγεθος στοιχείων : **6000 μm** , συνολικά **5550** στοιχεία **β)** μέγεθος στοιχείων : **3000 μm** , συνολικά **14461** στοιχεία **γ)** μέγεθος στοιχείων : **1500 μm** , συνολικά **29566** στοιχεία **δ)** μέγεθος στοιχείων : **1000 μm** , συνολικά **46666** στοιχεία **ε)** μέγεθος στοιχείων : **800 μm** , συνολικά **59848** στοιχεία **στ)** μέγεθος στοιχείων : **700 μm** , συνολικά **72521** στοιχεία .

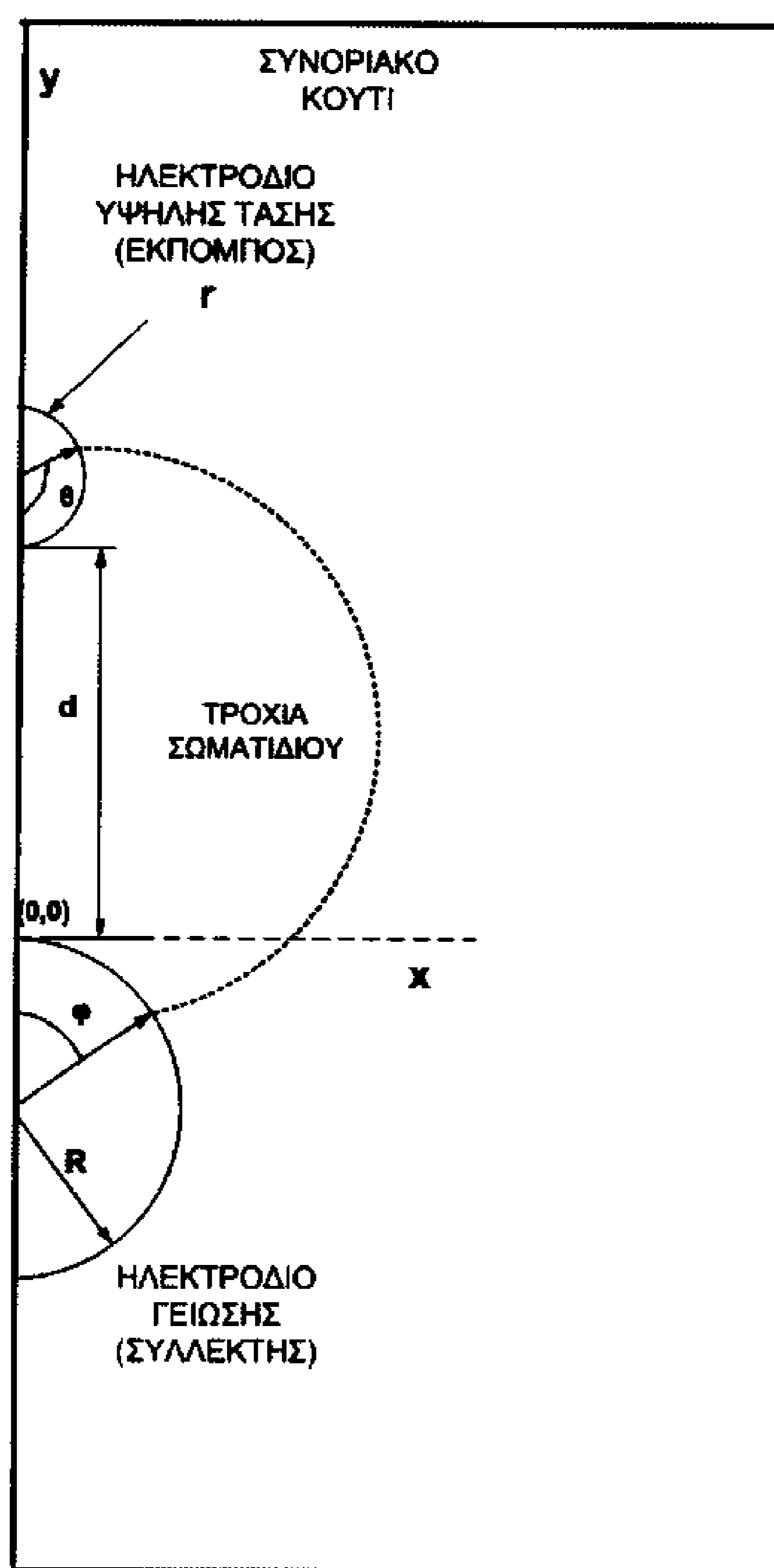
3.3 Διάταξη προσομοίωσης.

Έχοντας ολοκληρώσει το στάδιο της μοντελοποίησης, το επόμενο βήμα είναι η προσομοίωση της συμπεριφοράς του ηλεκτρικού πεδίου για διάφορες γεωμετρίες ασύμμετρων ηλεκτροδίων καθώς και η απεικόνιση των δυναμικών γραμμών που δημιουργούνται κατά την εφαρμογή συνεχούς υψηλής τάσης . Η προσομοίωση των δυναμικών γραμμών του πεδίου έγινε με την τοποθέτηση σωματιδίων στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου υψηλής τάσης (εκπομπός) σε διαφορετικές θέσεις με την μορφή

γωνιών σε σχέση με τον κάθετο άξονα y . Αυτές οι γωνίες ονομάζονται και γωνίες αναχώρησης σωματιδίου, ενώ οι γωνίες με τις οποίες το κάθε σωματίδιο προσπίπτει στην επιφάνεια του ηλεκτροδίου γείωσης (συλλέκτης) ονομάζονται και γωνίες πρόσπτωσης σωματιδίου.

Η τροχιά που διαγράφει το εκάστοτε σωματίδιο από την επιφάνεια του εκπομπού μέχρι την πρόσκρουση του στην επιφάνεια στον συλλέκτη ακολουθεί την εκάστοτε δυναμική γραμμή του πεδίου (Peek F.W, 1915) και ονομάζεται τροχιά σωματιδίου με μήκος L . Αυτό το μήκος υπολογίστηκε για διάφορες γεωμετρίες ασύμμετρων ηλεκτροδίων καθώς και για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ τους, για τις διάφορες γωνίες αναχώρησης.

Για την προσομοίωση του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιήθηκαν τριγωνικά στοιχεία, τα οποία είναι και τα πιο διαδεδομένα με βάση την βιβλιογραφία. Προκειμένου να αναπτυχθεί ένα καλό δικτύωμα (mesh), ως προς το αριθμό και το μέγεθος των τριγωνικών στοιχείων και λαμβάνοντας υπόψη την συμμετρία της διάταξης των ηλεκτροδίων έγινε μοντελοποίηση και προσομοίωση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου, καθώς και προσομοίωση των δυναμικών γραμμών με βάση την παρακάτω γεωμετρία και λαμβάνοντας τον άξονα y ως άξονα συμμετρίας.



Εικόνα 3.11 : Γεωμετρία προσομοίωσης, με συμμετρία ως προς τον άξονα y

Κεφάλαιο 4 : Αποτελέσματα.

4.1 Δεδομένα γεωμετρικού μοντέλου.

Με την εξοικονόμηση υπολογιστικής ισχύος χρησιμοποιήθηκαν μικρότερα σε μέγεθος τριγωνικά στοιχεία για κάθε διάταξη ηλεκτροδίων και κατ επέκταση μεγαλύτερος αριθμός κόμβων, πράγμα που συνεπάγεται μεγαλύτερη ακρίβεια στα αποτελέσματα της προσομοίωσης.

Συνολικά χρησιμοποιήθηκαν τρία διαφορετικά σετ γεωμετριών, για τάση 1000V σταθερή σε όλες τις περιπτώσεις, με μεταβαλλόμενα τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά :

- Του εκπομπού (ακτίνα καμπυλότητας r)
- Της απόστασης μεταξύ συλλέκτη και εκπομπού (απόσταση d)
- Του συλλέκτη (ακτίνα καμπυλότητας R)

	V (V)	r (μm)	d (cm)	R (mm)
1 ^ο σετ	1000	25	1,2,3,4,5	15
2 ^ο σετ	1000	25,50,100 250,500,1000	3	15
3 ^ο σετ	1000	25	3	1,2,5,10,15

Πίνακας 4.1 : Γεωμετρικά χαρακτηριστικά μοντέλου προσομοίωσης .

4.2 Έλεγχος του εφαρμοζόμενου μοντέλου ανάλυσης σε γνωστές γεωμετρίες.

Αρχικά και προκειμένου να διαπιστωθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης του προγράμματος με την χρήση της μεθόδου των πεπερασμένων στοιχείων έγινε επαλήθευση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου βρίσκοντας την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του κατά μήκος της απόστασης εκπομπού-συλλέκτη, και συγκρίθηκαν με τις αντίστοιχες θεωρητικές τιμές όπως αυτές αναφέρονται στην βιβλιογραφία για γνωστές διατάξεις συμμετρικών ηλεκτροδίων. (E. Kuffel, W.S Zaengl, J.Kuffel , 2000)

Διατάξεις ηλεκτροδίων :

- Κύλινδρος - κύλινδρος
- Σύρμα – σύρμα

Χαρακτηριστικά ηλεκτροδίων :

ΔΙΑΤΑΞΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ	V (V)	r (mm)	d (cm)	R (mm)
Κύλινδρος -Κύλινδρος	1000	15	3	15
Σύρμα - Σύρμα	1000	0.025	3	0.025

Πίνακας 4.2 : Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διατάξεων ηλεκτροδίων : Κύλινδρος –Κύλινδρος ,Σύρμα - Σύρμα .

Και στις δύο περιπτώσεις διατάξεων των ηλεκτροδίων η απόσταση μεταξύ τους κρατήθηκε σταθερή , $d=3cm$, ενώ η μέγιστη θεωρητική τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου υπολογίστηκε βάσει της σχέσης : (E. Kuffel, W.S Zaengl, J.Kuffel , 2000)

$$E_{max} = \frac{V}{d} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \left(\frac{d}{r}\right)}}{\ln \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{2r}\right) + \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \left(\frac{d}{r}\right)}\right)} \quad (4.1)$$

Παρατηρήθηκαν οι εξής τιμές για την ένταση του ηλεκτρικού πεδίου :

Ένταση ηλεκτρικού Πεδίου E (V/m)				
Διάταξη	Κύλινδρος - κύλινδρος		Σύρμα - Σύρμα	
Ένταση	E_{max}	E_{min}	E_{max}	E_{min}
Προσομοίωσης	4.38×10^4	2.92×10^4	2.69×10^6	1.07×10^4
Θεωρητικές	4.38×10^4	Δ/γ^1	2.7×10^6	Δ/γ^1
Απόκλιση (%)	0	-	0.37	-

Πίνακας 4.3 : Ένταση ηλεκτρικού πεδίου και σύγκριση με θεωρητικές τιμές σε διατάξεις ηλεκτροδίων : Κύλινδρος –Κύλινδρος ,Σύρμα - Σύρμα .

¹ Η σχέση (4.1) για τον υπολογισμό της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου μας δίνει μόνο την μέγιστη τιμή του , συνεπώς στον πίνακα 4.3 δεν υπάρχει θεωρητική τιμή για το μέγεθος E_{min} .

4.3 Αποτελέσματα κατανομής πεδίου σε διάταξη σύρμα-κύλινδρος.

Έχοντας παρατηρήσει από τον πίνακα 4.3 ότι υπάρχει σύγκλιση μεταξύ των τιμών της προσομοίωσης του εφαρμοζόμενου γεωμετρικού μοντέλου και των αντίστοιχων θεωρητικών τιμών της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου, έγινε προσομοίωση σε διάταξη ηλεκτροδίων σύρμα – κύλινδρος και λήφθηκαν τα παρακάτω αποτελέσματα για την κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου :

Διάταξη ηλεκτροδίων :

- Σύρμα - κύλινδρος

Χαρακτηριστικά :

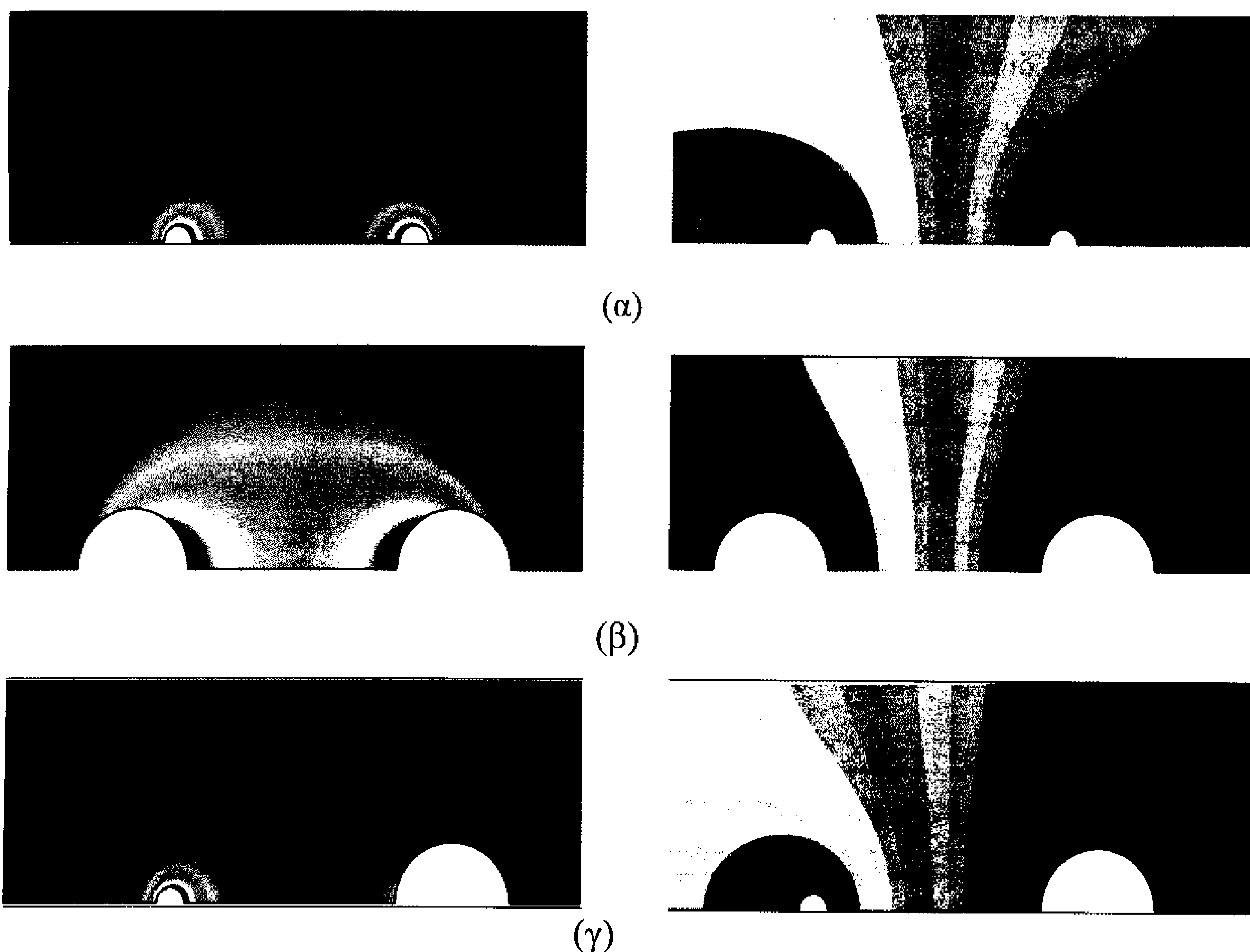
ΔΙΑΤΑΞΗ ΗΛΕΚΤΡΟΔΙΩΝ	V (V)	r (μm)	d (cm)	R (mm)
Σύρμα -Κύλινδρος	1000	25	3	15

Πίνακας 4.4 : Γεωμετρικά χαρακτηριστικά διάταξης ηλεκτροδίων : Σύρμα-Κύλινδρος.

Μέγιστη τιμή έντασης ηλεκτρικού πεδίου	$E_{\max}(\text{V/m}) :$	4.19×10^6
Ελάχιστη τιμή έντασης ηλεκτρικού πεδίου	$E_{\min}(\text{V/m}) :$	1.45×10^4

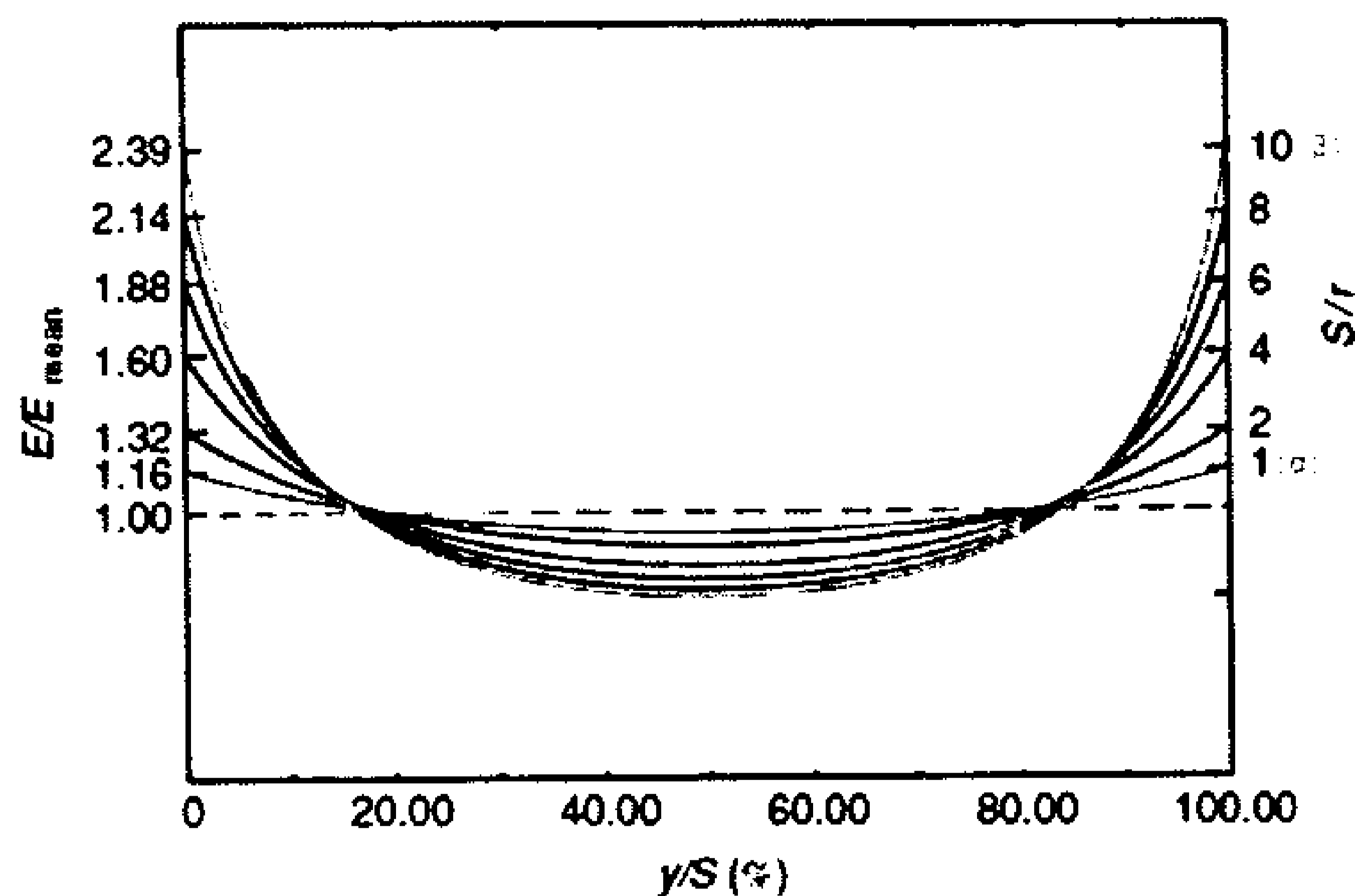
Πίνακας 4.5 : Μέγιστη και ελάχιστη τιμή της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε διάταξη ηλεκτροδίων σύρμα -κύλινδρος .

Παρακάτω γίνεται απεικόνιση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου και των ισοδυναμικών επιφανειών για διατάξεις ηλεκτροδίων σύρμα-σύρμα, κύλινδρος-κύλινδρος , σύρμα-κύλινδρος μέσω της προσομοίωσης. Οι εικόνες είναι ενδεικτικές και η ίδια συμπεριφορά της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου και των ισοδυναμικών επιφανειών παρατηρείται και για τα υπόλοιπα σετ διατάξεων ηλεκτροδίων με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά που αναφέρονται παραπάνω :



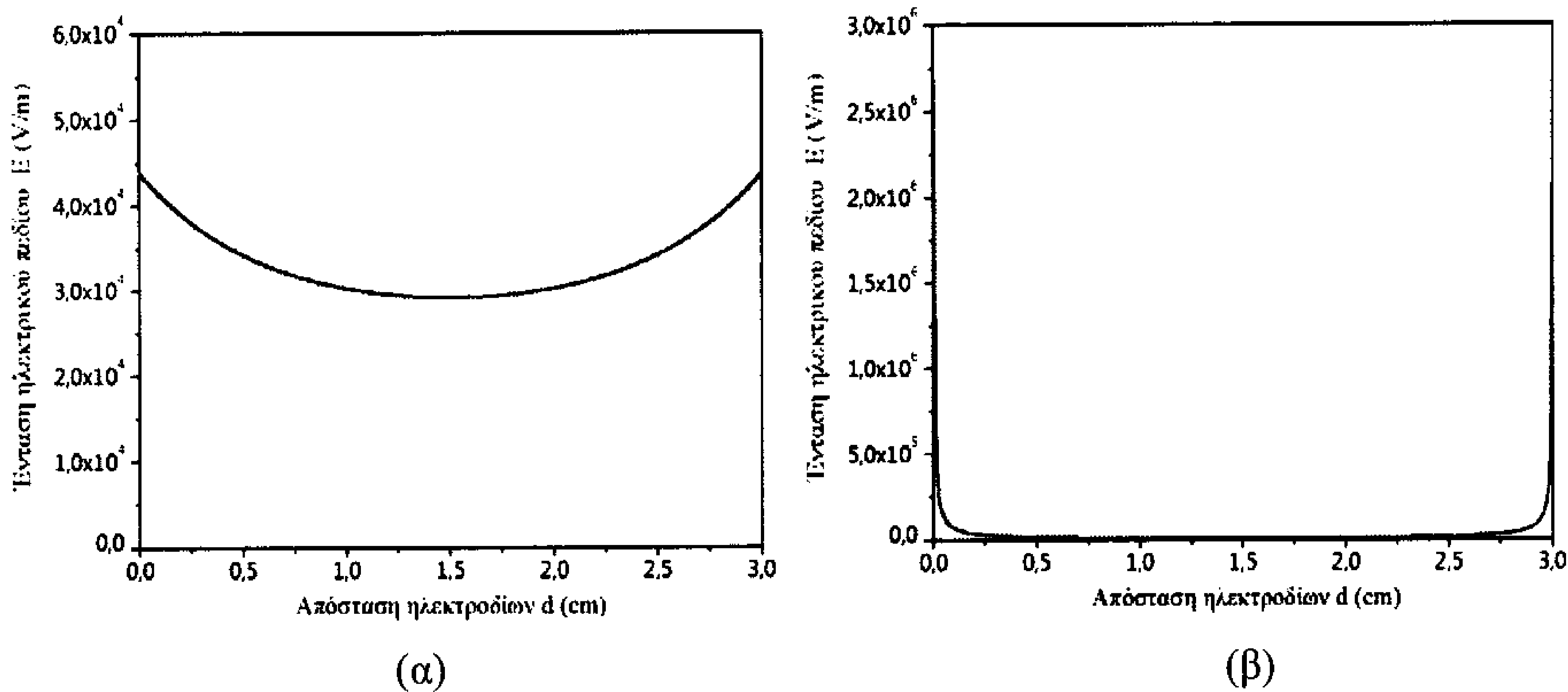
Εικόνα 4.1 : Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου και των ισοδυναμικών επιφανειών κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη : (α) εκπομπός σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ – συλλέκτης σύρμα ακτίνας $R=25\mu\text{m}$, (β) εκπομπός κύλινδρος ακτίνας $r=15\text{mm}$ - συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$, (γ) εκπομπός σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$

Σύμφωνα με τον Kuffel.E η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε διατάξεις ηλεκτροδίων : σύρμα-σύρμα και κύλινδρος- κύλινδρος έχει την παρακάτω μορφή :



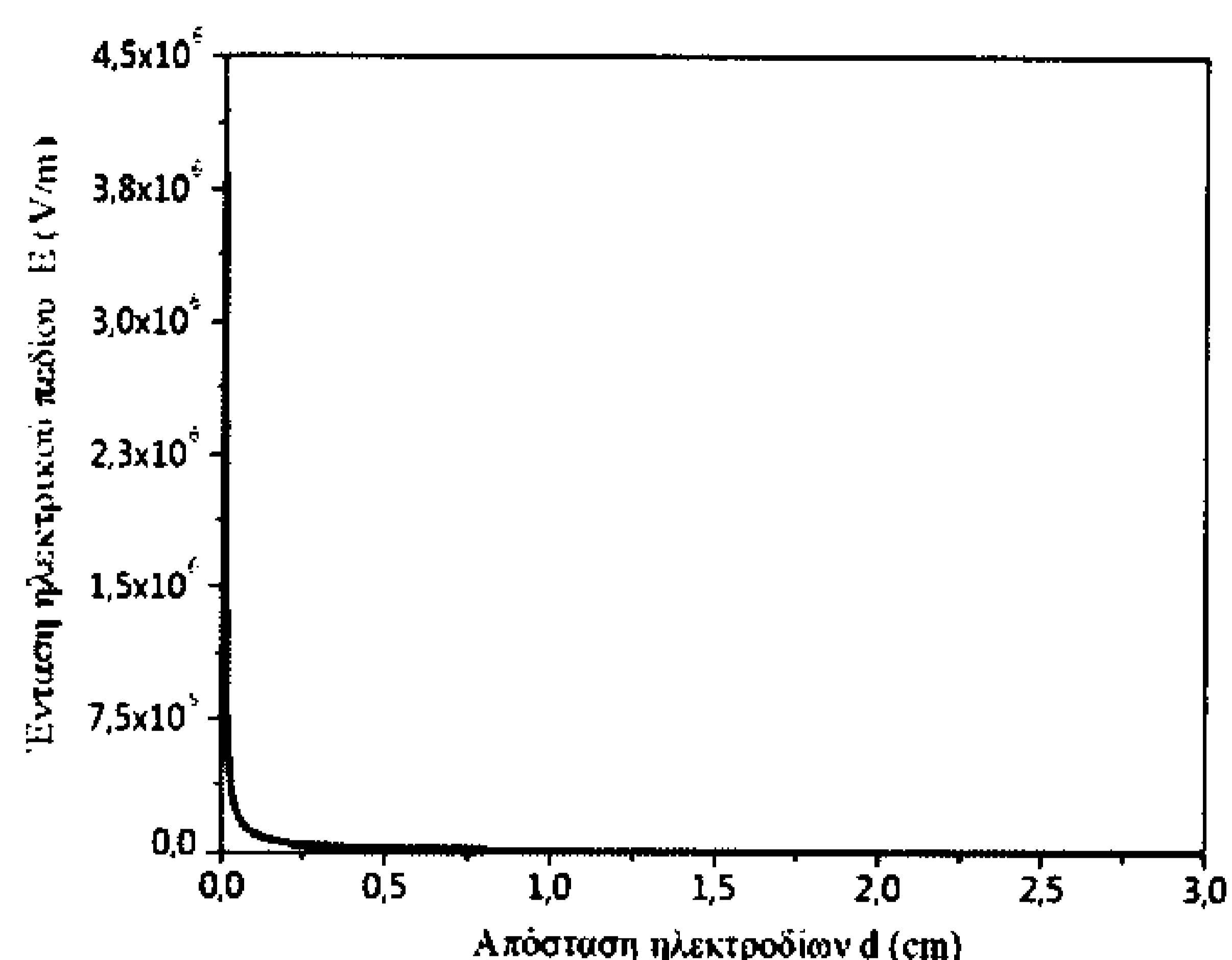
Εικόνα 4.2: Θεωρητική κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη : (α) κύλινδρος -κύλινδρος (β) σύρμα - σύρμα. πηγή : Kuffel E

Από την προσομοίωση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου σε διατάξεις ηλεκτροδίων σύρμα-σύρμα και κύλινδρος- κύλινδρος προέκυψε ότι υπάρχει σύγκλιση μεταξύ των θεωρητικών μορφών και των αντίστοιχων της προσομοίωσης :



Εικόνα 4.3: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη: (α) εκπομπός κύλινδρος ακτίνας $r=15\text{mm}$ – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$ εκπομπός (β) σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ – συλλέκτης σύρμα ακτίνας $R=25\mu\text{m}$.

Η κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου σε διάταξη ηλεκτροδίων σύρμα – κύλινδρος λόγω της ανομοιογένειας του σε αυτή την διάταξη παρουσιάζει τη παρακάτω μορφή



Εικόνα 4.4: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη: εκπομπός σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$.

4.4 Προσομοίωση δυναμικών γραμμών και τροχιών σωματιδίων.

Προκειμένου να μελετηθεί η επίδραση που έχουν τα χαρακτηριστικά της γεωμετρίας στην κατανομή των δυναμικών γραμμών, σε διατάξεις ασύμμετρων ηλεκτροδίων έγινε προσομοίωση με τρία σετ γεωμετριών βάσει των χαρακτηριστικών που αναφέρθηκαν παραπάνω.

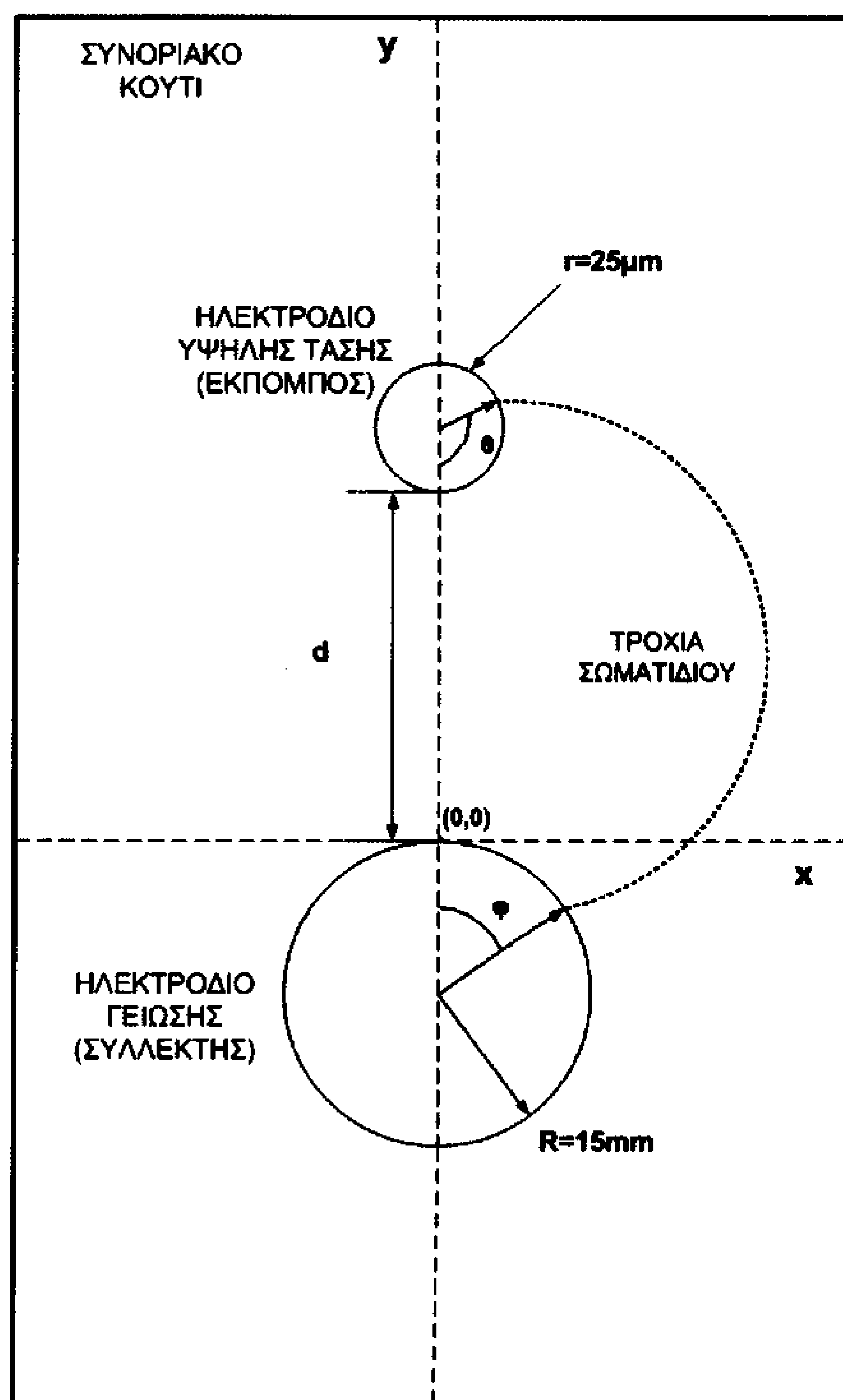
	V (V)	r (μm)	d (cm)	R (mm)
1 ^ο σετ	1000	25	1,2,3,4,5	15
2 ^ο σετ	1000	25,50,100 250,500,1000	3	15
3 ^ο σετ	1000	25	3	1,2,5,10,15

Πίνακας 4.6 : Γεωμετρικά χαρακτηριστικά του μοντέλου για την προσομοίωση των δυναμικών γραμμών.

1^ο σετ :

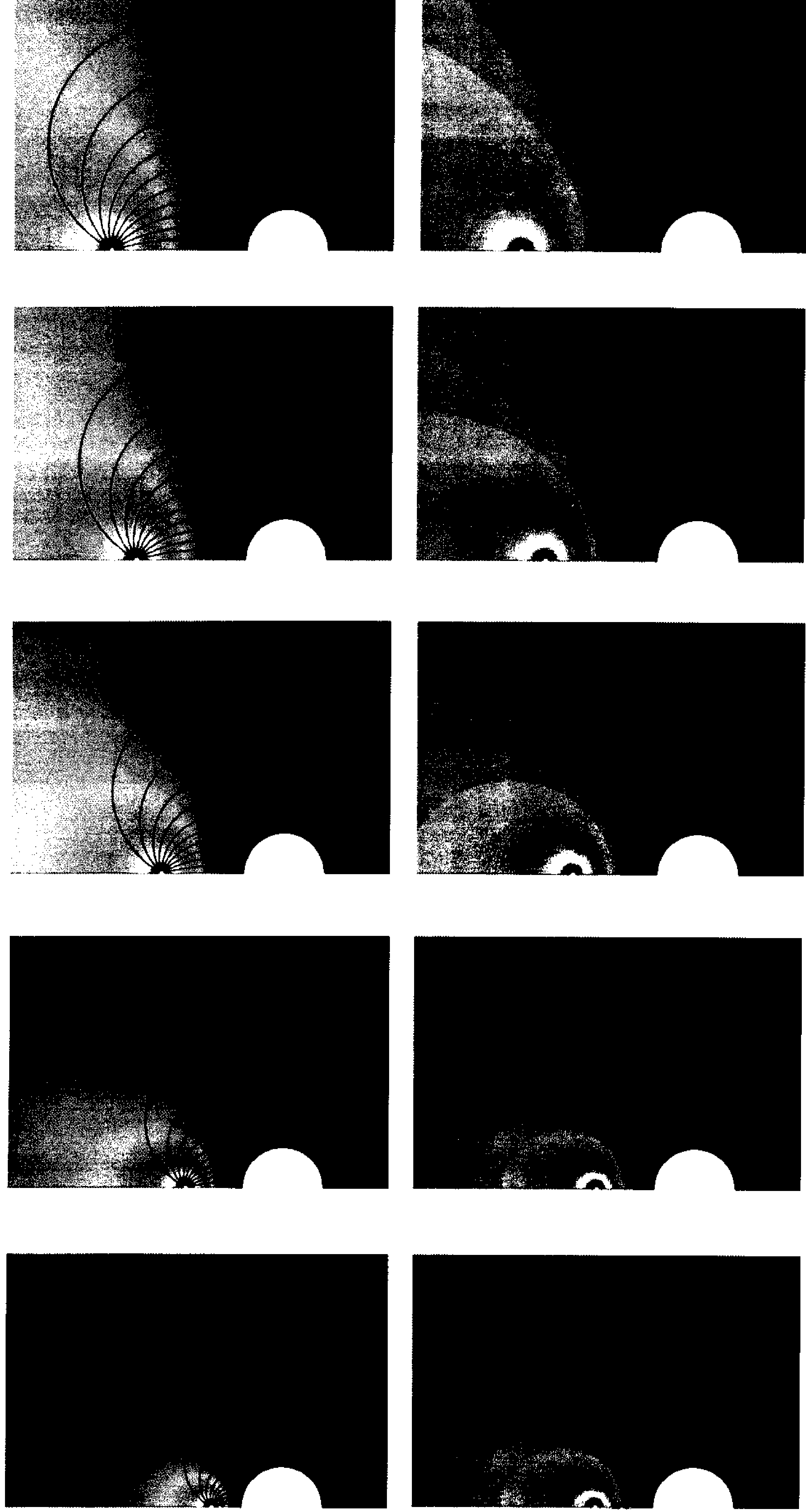
Μεταβολή της απόστασης d μεταξύ εκπομπού και συλλέκτη.

Τάση V :	1000V
Ακτίνα εκπομπού r :	25 μ m
Απόσταση ηλεκτροδίων d :	1, 2, 3, 4, 5 cm
Ακτίνα συλλέκτη R :	15 mm



Εικόνα 4.5 : Κατανομή των δυναμικών γραμμών για διαφορετικές αποστάσεις d των ηλεκτροδίων σε διάταξη: εκπομπός κύλινδρος ακτίνας καμπυλότητας $r=15\text{mm}$ – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας καμπυλότητας $R=15\text{mm}$.

Προσομοίωση δυναμικών γραμμών με το ηλεκτρικό πεδίο (πάνω σειρά), ισοδυναμικών επιφανειών (κάτω σειρά) .



α)

β)

γ)

δ)

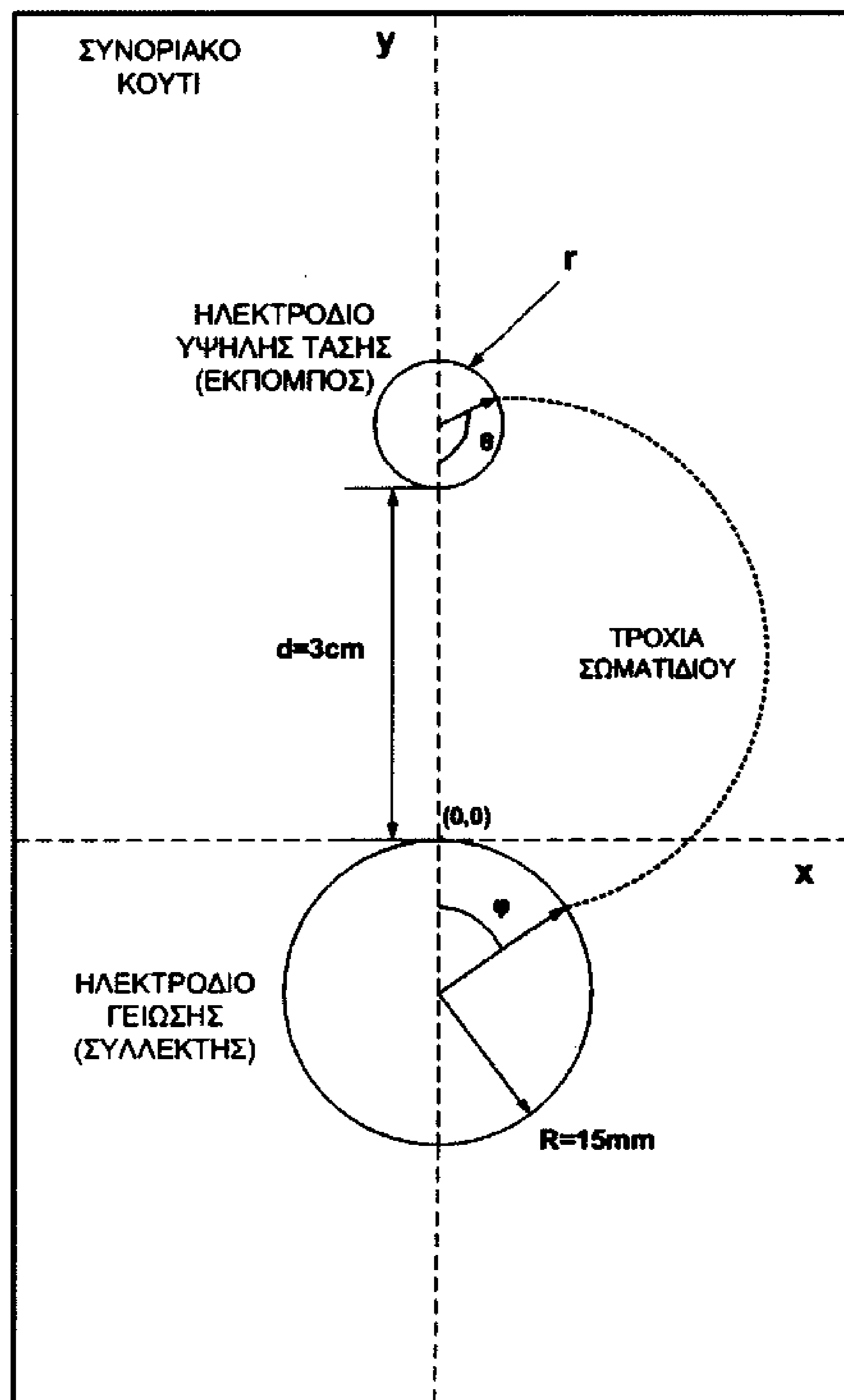
ε)

Εικόνα 4.6: Μεταβολή μήκους τροχιάς σωματιδίου για γωνίες αναχώρησης 0° - 150° , με μεταβαλλόμενη απόσταση ηλεκτροδίων d ,γεωμετρικών χαρακτηριστικών :
 α) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=1\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ β) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=2\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ γ) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ δ) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=4\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ ε) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=5\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$

2^ο σΕΤ :

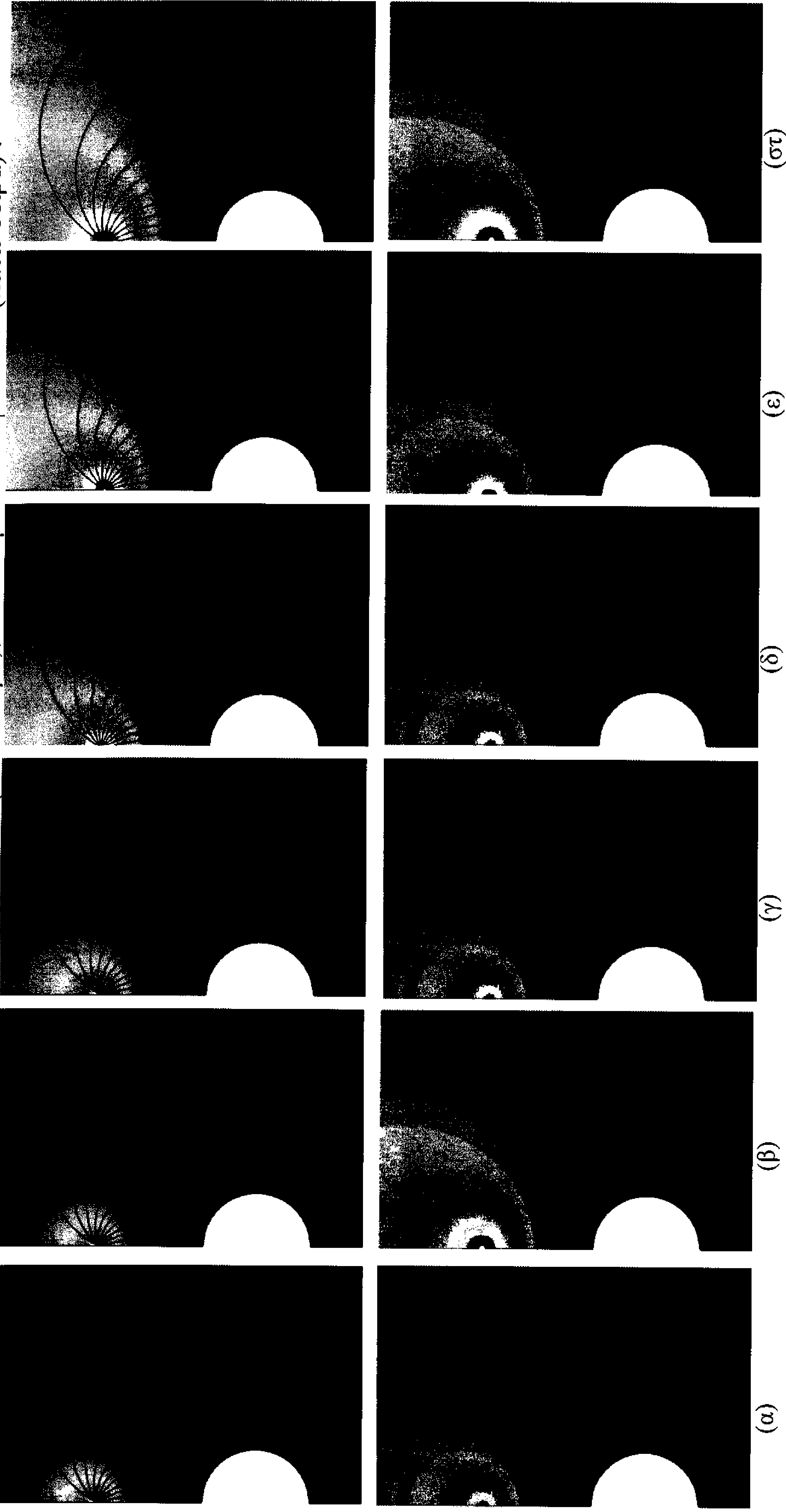
Μεταβολή της ακτίνας r του εκπομπού

Τάση V :	1000V
Ακτίνα εκπομπού r :	25 , 50 , 100 , 250 , 500 , 1000 μm
Απόσταση ηλεκτροδίων d :	3 cm
Ακτίνα συλλέκτη R :	15 mm



Εικόνα 4.7: Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη: εκπομπός κύλινδρος μεταβλητής ακτίνας καμπυλότητας r – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας καμπυλότητας $R=15\text{mm}$.

Ποσοστά δυναμικών γραμμών με το ηλεκτρικό πεδίο (πάνω σειρά), ισοδυναμικών επιφανειών (κάτω σειρά).

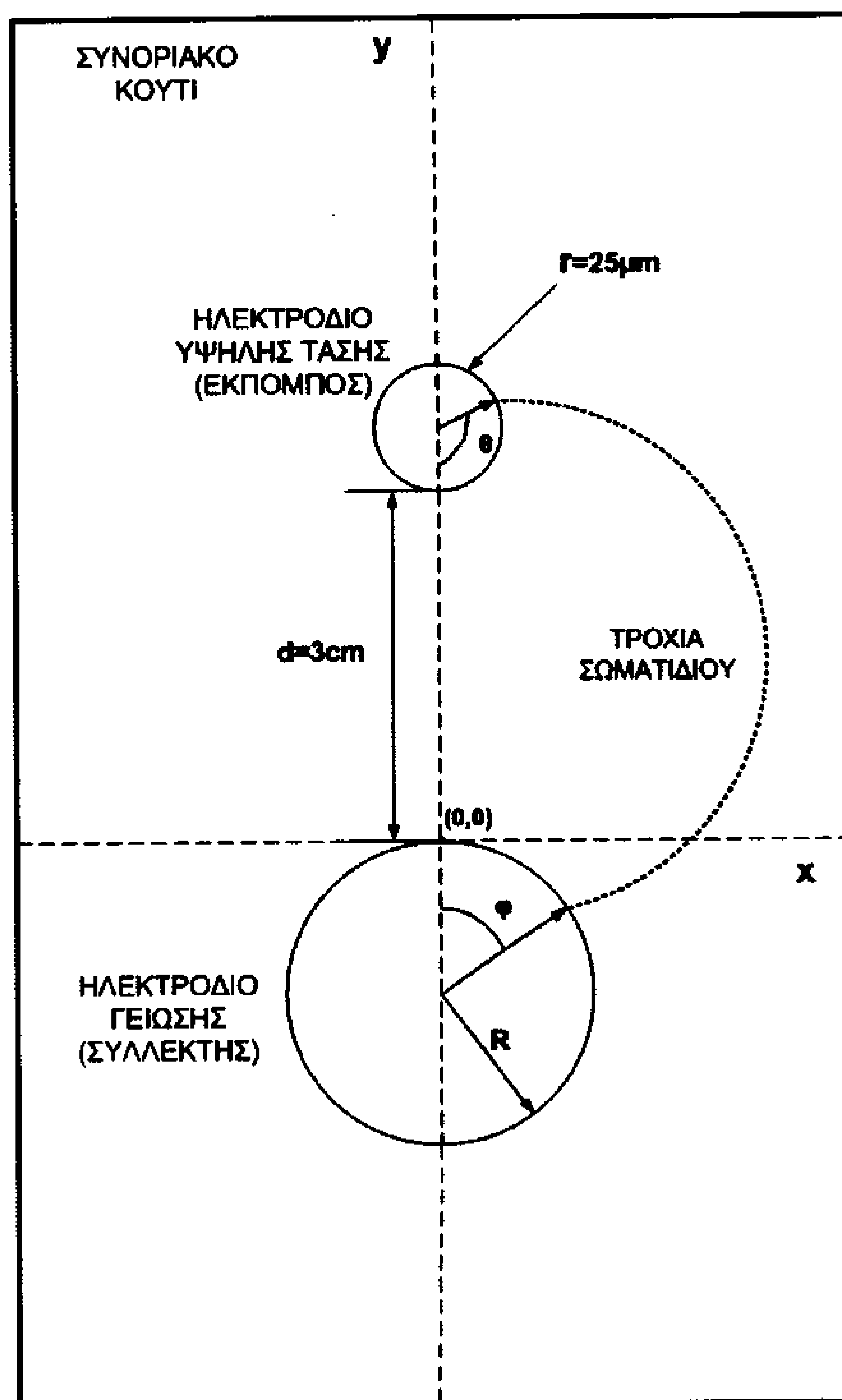


Εικόνα 4.8: Μεταβολή μήκους τροχιάς σωματιδίου για γωνίες αναχώρησης 0° - 150° , με μεταβαλλόμενη ακτίνα r του εκπομπού, γεωμετρικών χαρακτηριστικών :
 α) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ β) ακτίνα εκπομπού $r=50\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ γ) ακτίνα εκπομπού $r=100\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ δ) ακτίνα εκπομπού $r=250\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ ε) ακτίνα εκπομπού $r=500\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$ στ) ακτίνα εκπομπού $r=1000\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$

3^ο σετ :

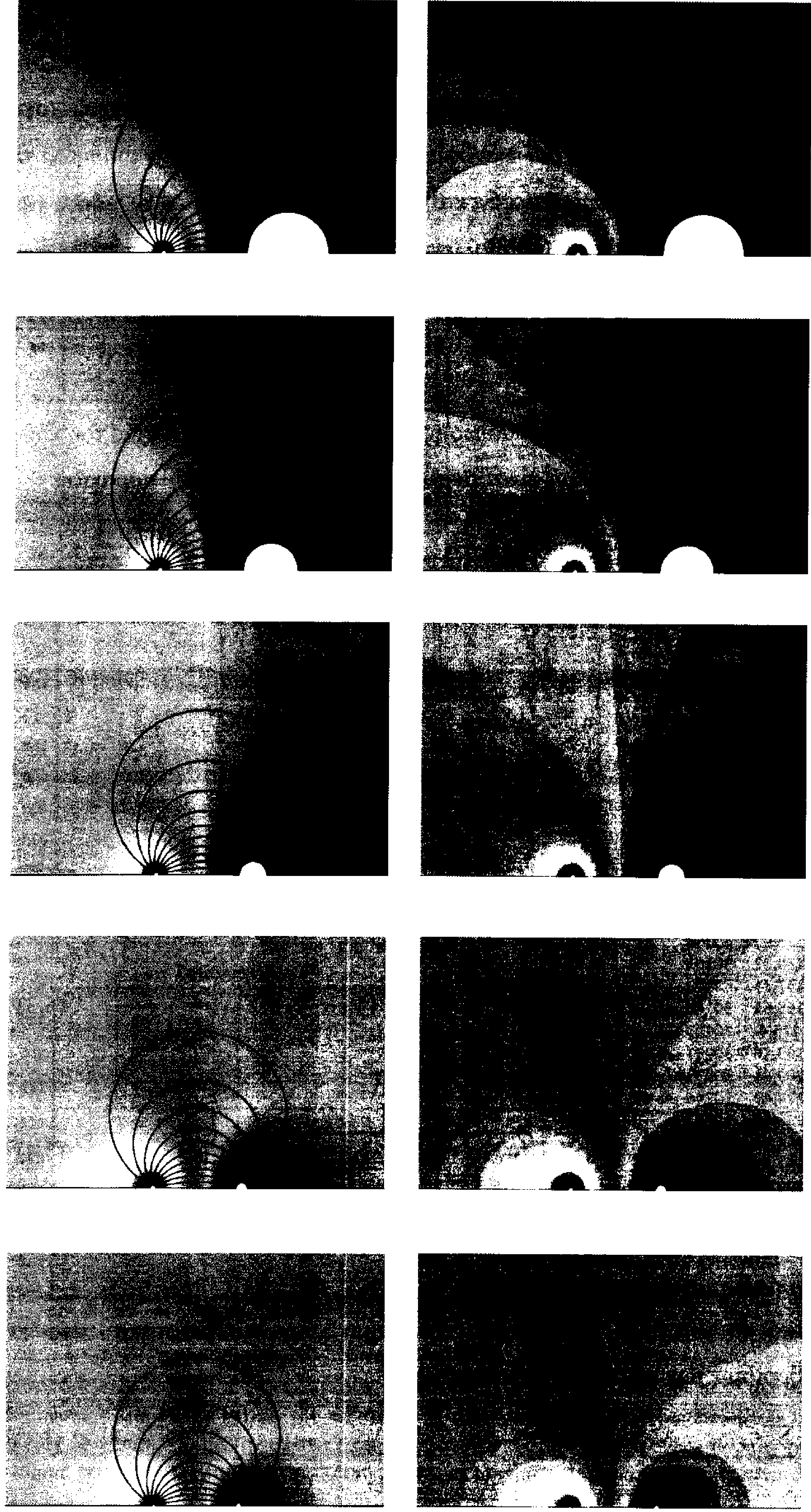
Μεταβολή της ακτίνας R του συλλέκτη

Τάση V :	1000V
Ακτίνα εκπομπού r :	25 μm
Απόσταση ηλεκτροδίων d :	3 cm
Ακτίνα συλλέκτη R :	1, 2, 5, 10, 15 mm



Εικόνα 4.9 : Κατανομή του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος της απόστασης d των ηλεκτροδίων σε διάταξη: εκπομπός κύλινδρος ακτίνας καμπυλότητας $r=15\text{mm}$ – συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας καμπυλότητας $R=15\text{mm}$.

Προσομοίωση δυναμικών γραμμών με το ηλεκτρικό πεδίο (πάνω σειρά), ισοδυναμικών επιφανειών (κάτω σειρά).



α)

β)

γ)

δ)

ε)

Εικόνα 4.10 : Μεταβολή μήκους τροχιάς σωματιδίου για γωνίες αναχώρησης 0° - 150° , με μεταβαλλόμενη ακτίνα R του συλλέκτη, γεωμετρικών χαρακτηριστικών :
α) ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=1\text{mm}$ **β)** ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=2\text{mm}$ **γ)** ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=5\text{mm}$ **δ)** ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=10\text{mm}$ **ε)** ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$, ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$

Κεφάλαιο 5 : Επεξεργασία αποτελεσμάτων.

5.1 Υπολογισμός μήκους τροχιάς σωματιδίου.

Προκειμένου να διαπιστωθεί εάν και κατά πόσο επηρεάζεται το μήκος της τροχιάς των σωματιδίων από την μεταβολή των γεωμετρικών χαρακτηριστικών των ηλεκτροδίων, έγινε ανάλυση των τροχιών υπολογίζοντας το μήκος τους για κάθε σετ γεωμετριών . Ο υπολογισμός έγινε με τον εξής τρόπο :

Μέσω του προγράμματος της προσομοίωσης έγινε εξαγωγή της τροχιάς του κάθε σωματιδίου σε αρχείο με τη μορφή συντεταγμένων (x,y) όπως φαίνεται παρακάτω :

	x	y
1	17,678	30043
2	29,673	30055
3	37,718	30063
4	42,847	30068
5	46,509	30072
6	50,574	30076
7	55,344	30080
8	59,731	30085
9	63,816	30089
10	67,658	30093
11	71,294	30096
12	79,82	30105
13	87,516	30112
14	94,577	30119
15	101,15	30126
16	107,33	30132
17	118,57	30143
18	128,82	30153
19	138,32	30163
20	147,21	30172
21	155,61	30180
22	175,4	30199
23	193,16	30217
24	209,41	30233
25	224,49	30248
26	238,66	30262
27	264,18	30287
28	287,45	30309
29	308,97	30330
30	329,11	30350

Έπειτα έγινε υπολογισμός των επιμέρους μετατοπίσεων

l_n με βάση την παρακάτω σχέση :

$$l_n = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \quad (5.1)$$

Δηλαδή :

$$l_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (5.2)$$

$$l_2 = \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} \quad (5.3)$$

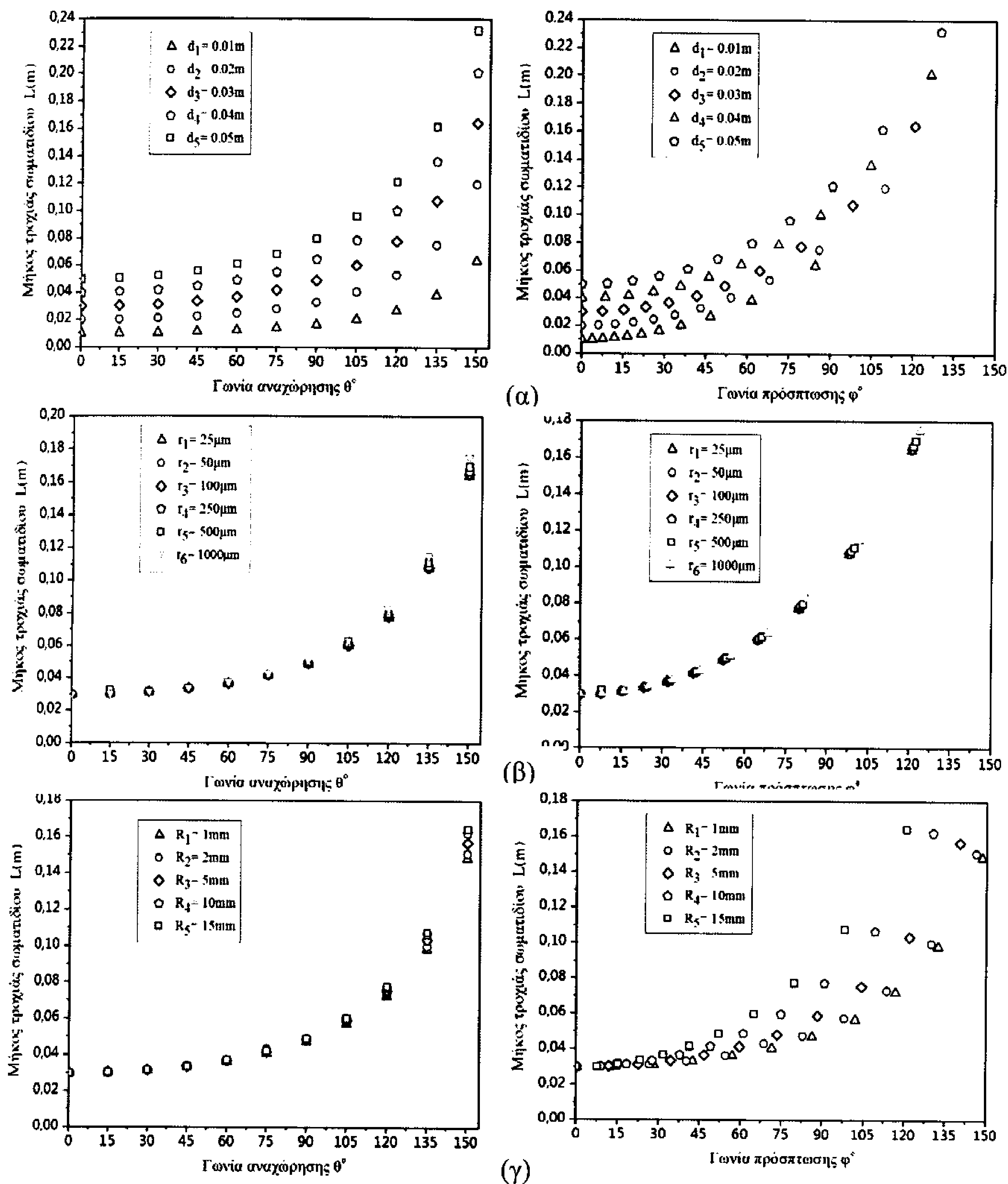
$$l_n = \sqrt{(x_{n+1} - x_n)^2 + (y_{n+1} - y_n)^2} \quad (5.4)$$

Εικόνα 5.1: Εξαγωγή της τροχιάς του σωματιδίου σε μορφή συντεταγμένων (x,y)

Τελικά το μήκος L της τροχιάς του σωματιδίου υπολογίστηκε από το συνολικό άθροισμα των επιμέρους μετατοπίσεων :

$$L = \sum_1^n l_i \quad (5.5)$$

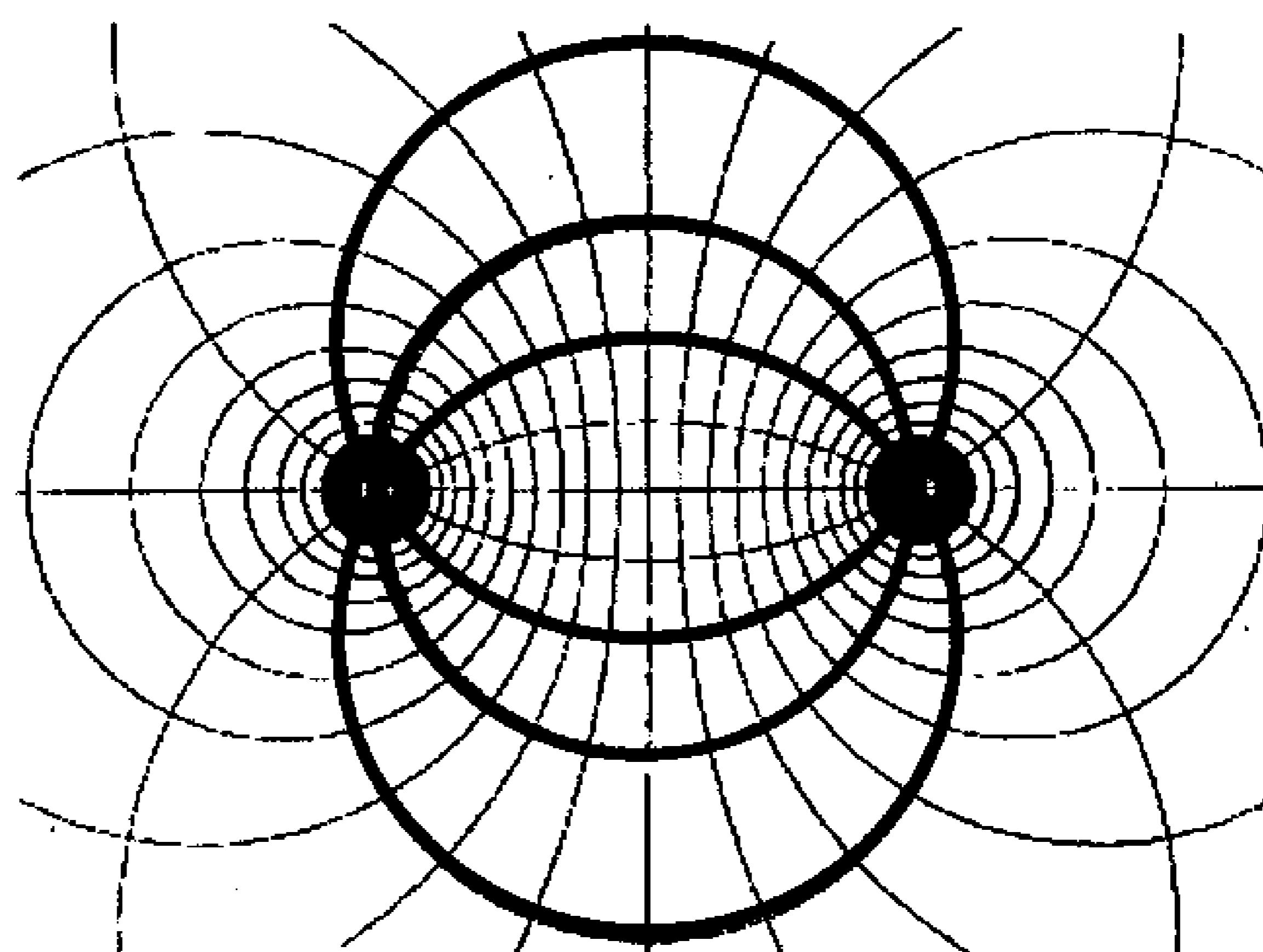
Με βάση τα παραπάνω υπολογίστηκαν οι μεταβολές του μήκους των τροχιών των σωματιδίων για διάφορες ακτίνες καμπυλότητας r του εκπομπού, R του συλλέκτη και για διαφορετικές αποστάσεις μεταξύ των ηλεκτροδίων, για γωνίες αναχώρησης 0° - 150° . Παρακάτω φαίνονται αυτές οι μεταβολές ως προς την γωνία αναχώρησης του σωματιδίου από την επιφάνεια του εκπομπού, αλλά και ως προς την γωνία με την οποία το σωματίδιο προσπίπτει στον συλλέκτη:



Εικόνα 5.2 : Μεταβολή μήκους τροχιάς σωματιδίου συναρτήσει των γωνιών αναχώρησης θ° και πρόσπτωσης ϕ° σε σχέση (α) με την απόσταση d των ηλεκτροδίων, ακτίνα εκπομπού $r=25\mu m$ ακτίνα συλλέκτη $R=15mm$, (β) με την ακτίνα r του εκπομπού, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3cm$ ακτίνα συλλέκτη $R=15mm$, (γ) με την ακτίνα R του συλλέκτη, ακτίνα εκπομπού $r=25\mu m$ απόσταση ηλεκτροδίων $d=3cm$.

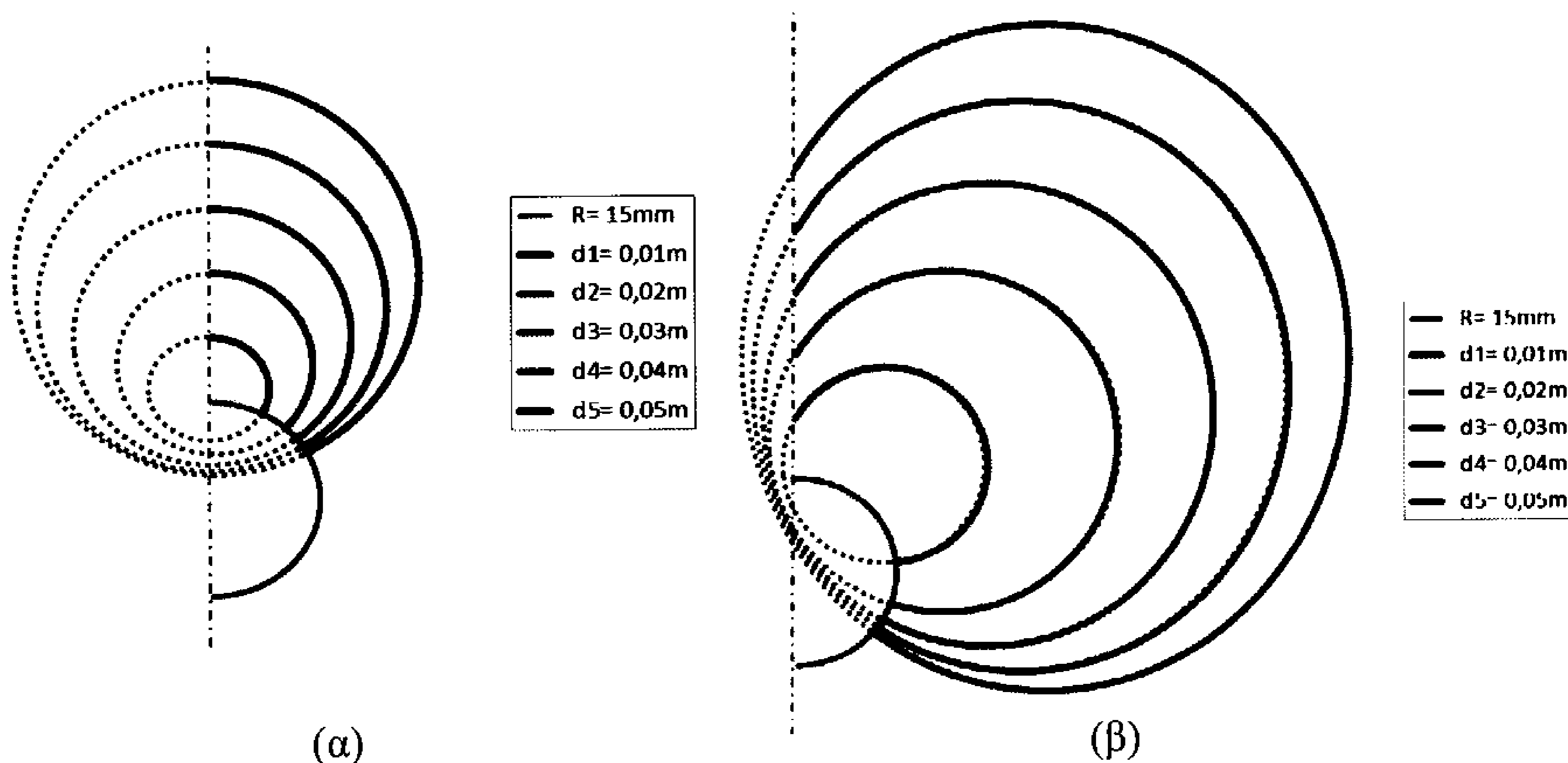
5.2 Ανάλυση των τροχιών σωματιδίων.

Με προέκταση των τροχιών των σωματιδίων προέκυψε ο σχηματισμός κύκλων επιβεβαιώνοντας την αντίστοιχη θεωρία με βάση τον F.W Peek, 1915, η οποία αναφέρει ότι οι δυναμικές γραμμές που δημιουργούνται μεταξύ δύο ίδιων αγωγών (διατάξεις ηλεκτροδίων σύρμα-σύρμα, κύλινδρος-κύλινδρος, σφαίρα-σφαίρα) με διαφορά δυναμικού σχηματίζουν κύκλους με κέντρα πάνω στον άξονα συμμετρίας τους :



Εικόνα 5.3 : Απεικόνιση δυναμικών γραμμών σε διάταξη ηλεκτροδίων σφαίρα-σφαίρα και προέκτασή τους για τον σχηματισμό κύκλων. F.W Peek, 1915

Παρακάτω φαίνεται η μεταβολή του μήκους των τροχιών των σωματιδίων και η δημιουργία των κύκλων για γωνίες αναχώρησης 90° και 150° σε διάταξη ηλεκτροδίων σύρμα-κύλινδρος για διαφορετικές αποστάσεις d μεταξύ τους



Εικόνα 5.4 : Τροχιές σωματιδίου και προέκτασή τους για τον σχηματισμό κύκλων σε διάταξη ηλεκτροδίων : εκπομπός σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$, για γωνίες αναχώρησης (α) 90° , (β) 150°

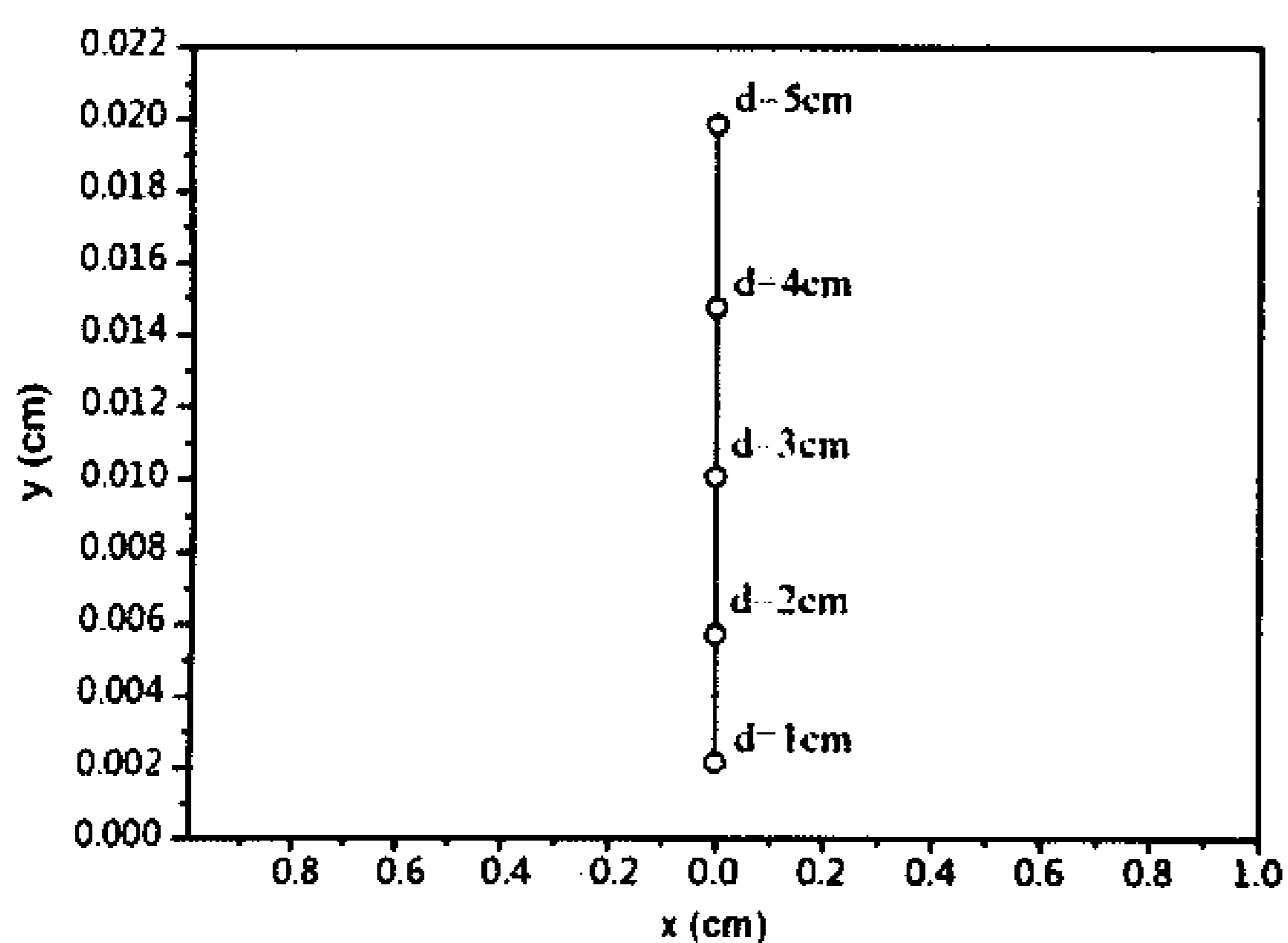
Για γωνίες αναχώρησης 90° παρατηρήθηκε ότι τα κέντρα των κύκλων βρίσκονται πάνω στον άξονα συμμετρίας των ηλεκτροδίων, σχηματίζοντας μια κατακόρυφη ευθεία, ενώ για τις 150° σχηματίζουν την παρακάτω καμπύλη :

Απόσταση ηλεκτροδίων	Συντεταγμένες κέντρων κύκλων	
	x (cm)	y (cm)
d=1cm	0.0025	0.213
d=2cm	0.0025	0.567
d=3cm	0.0025	1.004
d=4cm	0.0025	1.472
d=5cm	0.0025	1.983

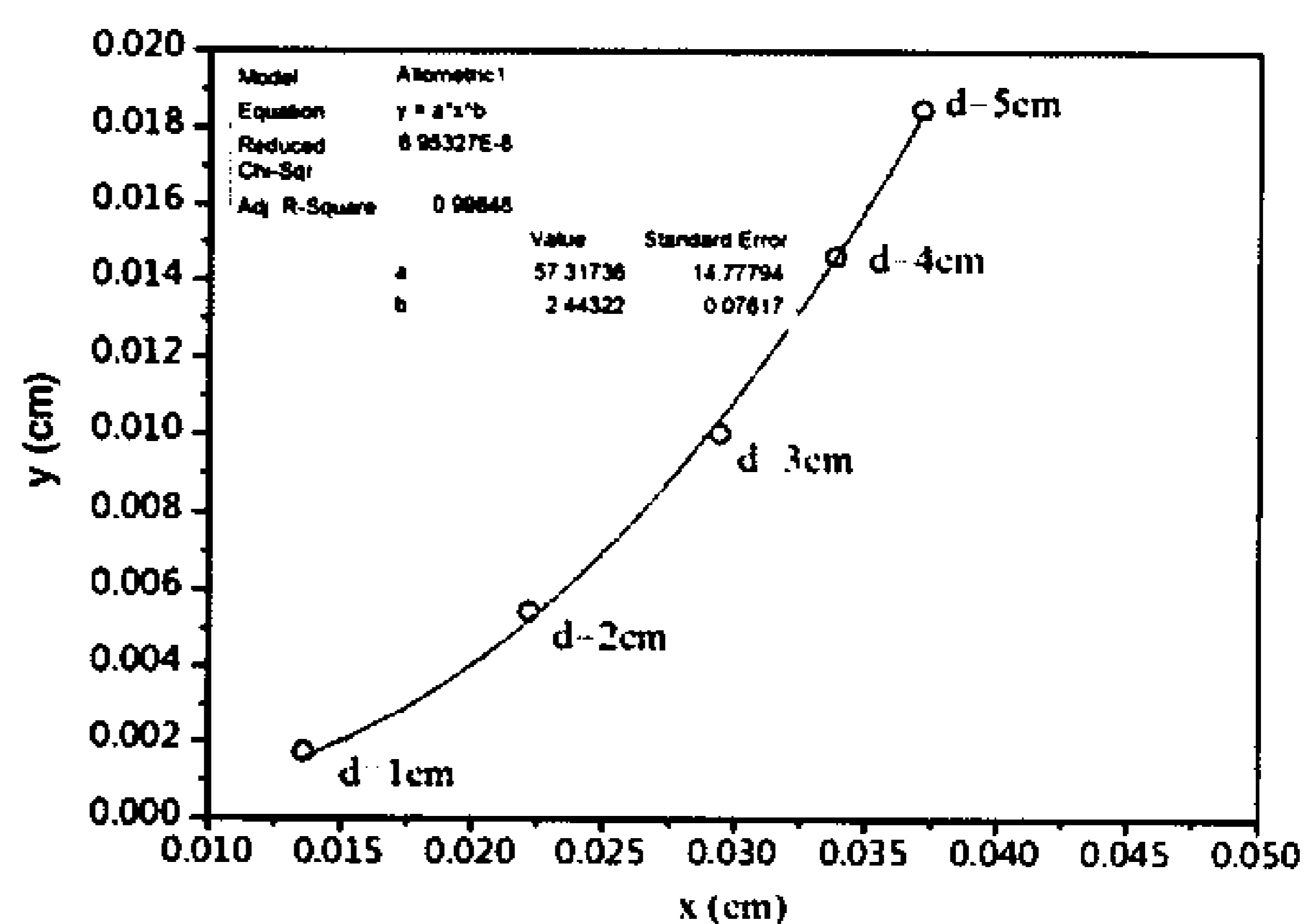
Πίνακας 5.1: Συντεταγμένες κέντρων κύκλων για γωνίες αναχώρησης 90°

Απόσταση ηλεκτροδίων	Συντεταγμένες κέντρων κύκλων	
	x (cm)	y (cm)
d=1cm	1.3623	0.1725
d=2cm	2.2170	0.5435
d=3cm	2.9413	1.0035
d=4cm	3.3841	1.4654
d=5cm	3.7150	1.8490

Πίνακας 5.2: Συντεταγμένες κέντρων κύκλων για γωνίες αναχώρησης 150°



(α)



(β)

Εικόνα 5.5 : Κέντρα κύκλων σε διάταξη ηλεκτροδίων εκπομπός σύρμα ακτίνας $r=25\mu\text{m}$ συλλέκτης κύλινδρος ακτίνας $R=15\text{mm}$, για γωνίες αναχώρησης (α) 90° (β) 150°

Για γωνίες αναχώρησης των σωματιδίων στις 150° τα κέντρα των κύκλων που δημιουργούνται από τις τροχιές τους μεταβάλλονται με βάση την εξίσωση :

$$y = a * x^b \quad (5.6)$$

Με εφαρμογή (fit) της παραπάνω εξίσωσης υπολογίστηκαν οι συντελεστές a , b , επομένως η σχέση που περιγράφει την μεταβολή των κέντρων των κύκλων είναι η εξής :

$$y = 57,31 * x^{2,44} \quad (5.7)$$

5.3 Κατανομή πυκνότητας ρεύματος.

Έχοντας υπολογίσει το μήκος (L) των τροχιών των σωματιδίων έγινε υπολογισμός της πυκνότητας ρεύματος J , χρησιμοποιώντας την παρακάτω σχέση (R.D Morrison & D.M Hopstock 1979) :

$$J = \mu * \epsilon_0 * \frac{V^2}{L^3} \text{ (A/m}^2\text{)} \quad (5.8)$$

Όπου

(διηλεκτρικό μέσο: αέρας)

μ : κινητικότητα των ιόντων του διηλεκτρικού μέσου = $1.8 \cdot 10^{-4} \frac{m^2}{s \cdot V}$

ϵ_0 : διηλεκτρική σταθερά του διηλεκτρικού μέσου = $8.85 \cdot 10^{-12} \frac{A \cdot s}{V \cdot m}$

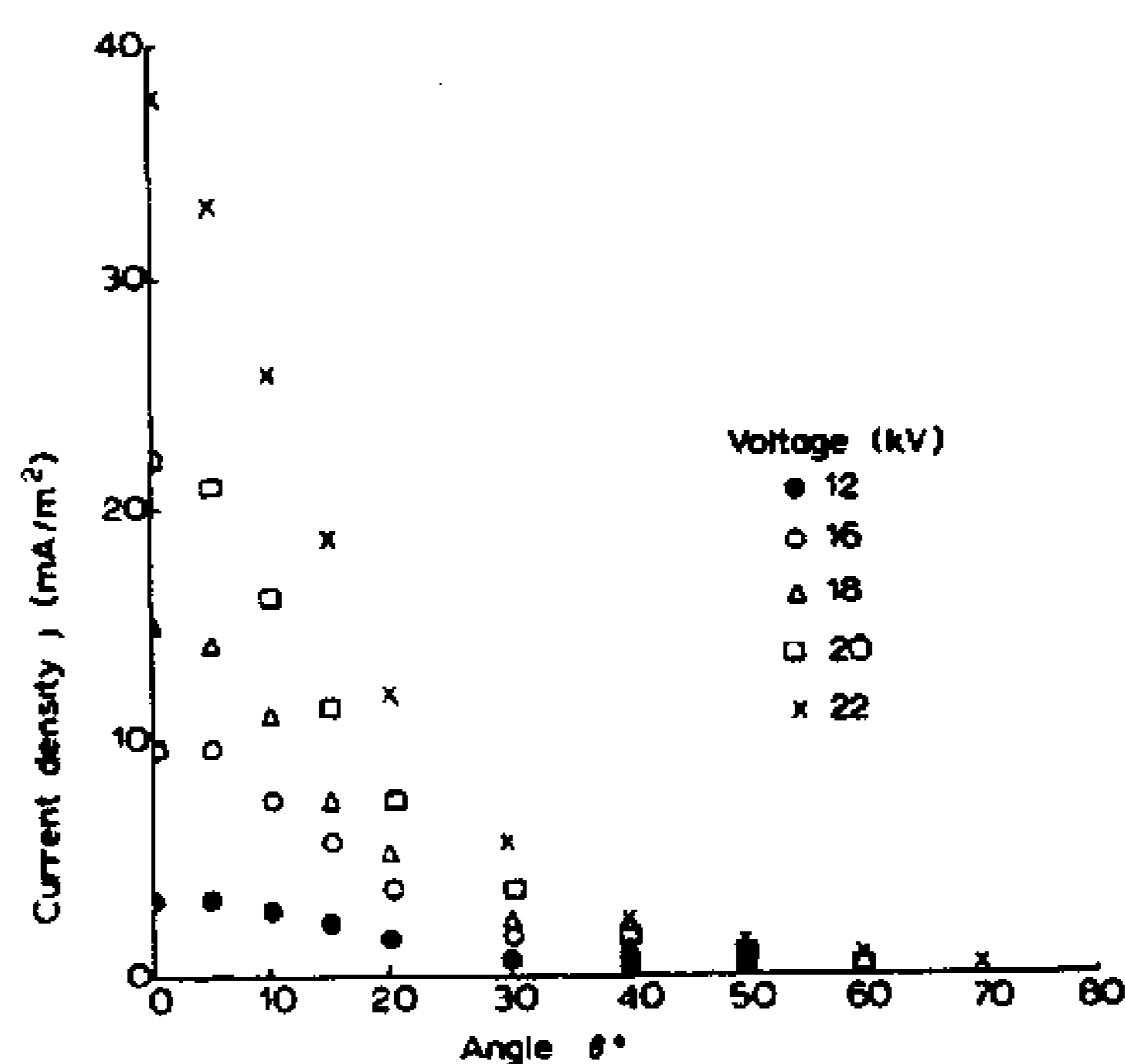
V : τάση εκπομπού (V)

L : μήκος τροχιάς σωματιδίου (m)

Σύμφωνα με τον R.D Morrison & D.M Hopstock 1979 ,για διάταξη ηλεκτροδίων σύρμα – κύλινδρος με χαρακτηριστικά:

Τάση V :	12 , 16 , 18 , 20 , 22 (kV)
Ακτίνα εκπομπού r :	114 μ m
Απόσταση ηλεκτροδίων d :	4 cm
Ακτίνα συλλέκτη R :	76 mm

η πυκνότητα ρεύματος J ακολουθεί την κατανομή weibull :



Εικόνα 5.5 : Κατανομή πυκνότητας ρεύματος J , σε σχέση με την γωνία πρόσπτωσης , για διάφορες τάσεις εκπομπού. Απόσταση ηλεκτροδίων $d=7$ cm,

5.3.1 Υπολογισμός πυκνότητας ρεύματος J .

Χρησιμοποιώντας τα μήκη των τροχιών έγινε υπολογισμός της πυκνότητας ρεύματος J , με βάση την σχέση (1.1). Ακόμα κανονικοποιήθηκαν τα αποτελέσματα βάσει του λόγου J/J_{\max} .

Ακτίνα εκπομπού: $r=25\mu\text{m}$

Ακτίνα συλλέκτη: $R=15\text{mm}$

Απόσταση ηλεκτροδίων	Πυκνότητα ρεύματος J (A/m^2)	J/J_{\max}	Γωνία αναχώρησης θ°
$d=1\text{cm}$	$1,59\text{E}-03$	1	0
$d=2\text{cm}$	$1,99\text{E}-04$	1	0
$d=3\text{cm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$d=4\text{cm}$	$2,49\text{E}-05$	1	0
$d=5\text{cm}$	$1,27\text{E}-05$	1	0

Πίνακας 5.3 : Πυκνότητα ρεύματος J , σε σχέση με την απόσταση d των ηλεκτροδίων,

Απόσταση ηλεκτροδίων: $d=3\text{cm}$ Ακτίνα συλλέκτη: $R=15\text{mm}$

Ακτίνα εκπομπού	Πυκνότητα ρεύματος J (A/m^2)	J/J_{\max}	Γωνία αναχώρησης θ°
$r=25\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$r=50\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$r=100\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$r=250\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$r=500\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$r=1000\mu\text{m}$	$5,90\text{E}-05$	1	0

Πίνακας 5.4 : Πυκνότητα ρεύματος J , σε σχέση με την ακτίνα r του εκπομπού,

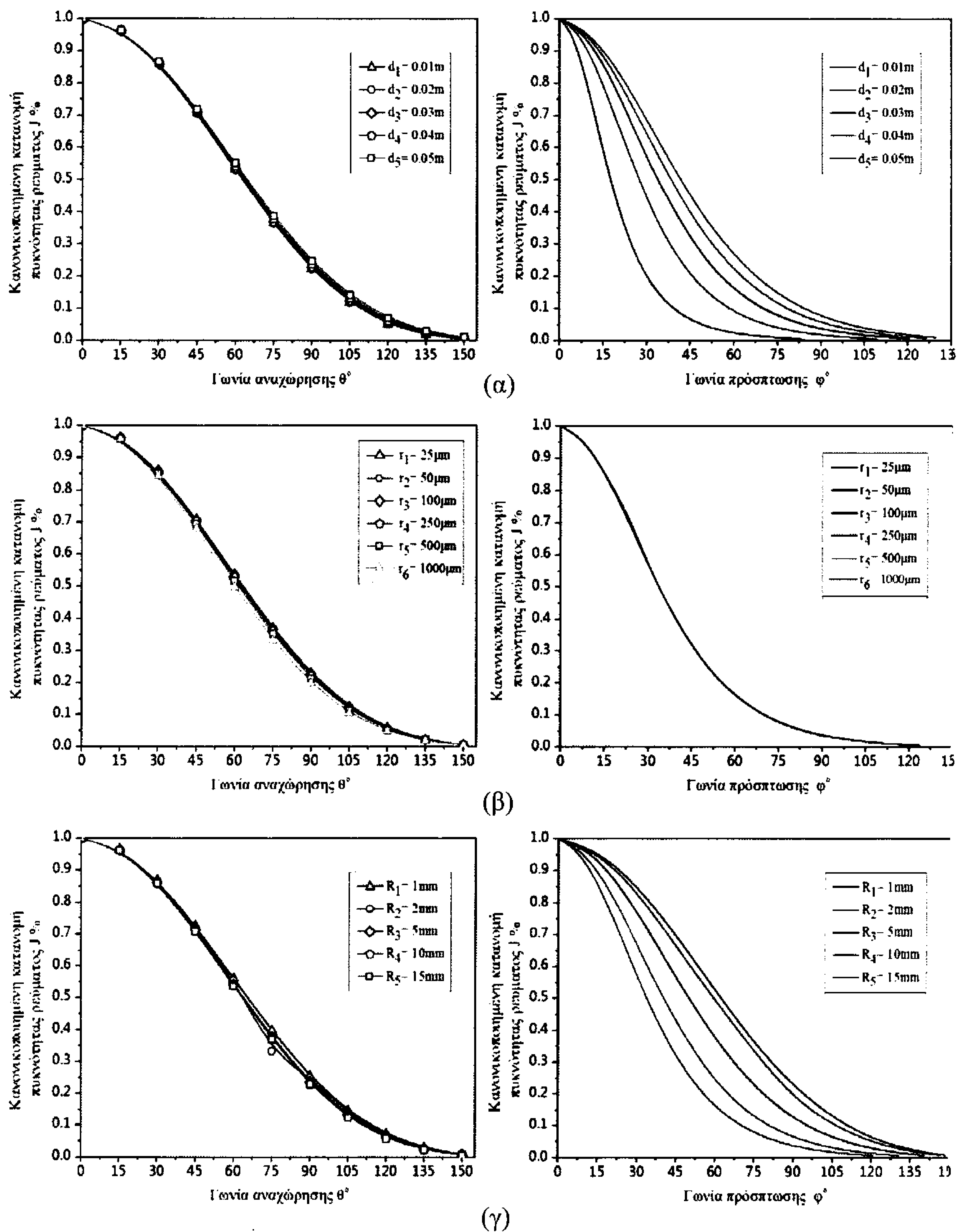
Ακτίνα εκπομπού: $r=25\mu\text{m}$

Απόσταση ηλεκτροδίων: $d=3\text{cm}$

Απόσταση ηλεκτροδίων	Πυκνότητα ρεύματος J (A/m^2)	J/J_{\max}	Γωνία αναχώρησης θ°
$R=1\text{mm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$R=2\text{mm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$R=5\text{mm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$R=10\text{mm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0
$R=15\text{mm}$	$5,90\text{E}-05$	1	0

Πίνακας 5.5 : Πυκνότητα ρεύματος J , σε σχέση με την με την ακτίνα R του συλλέκτη,

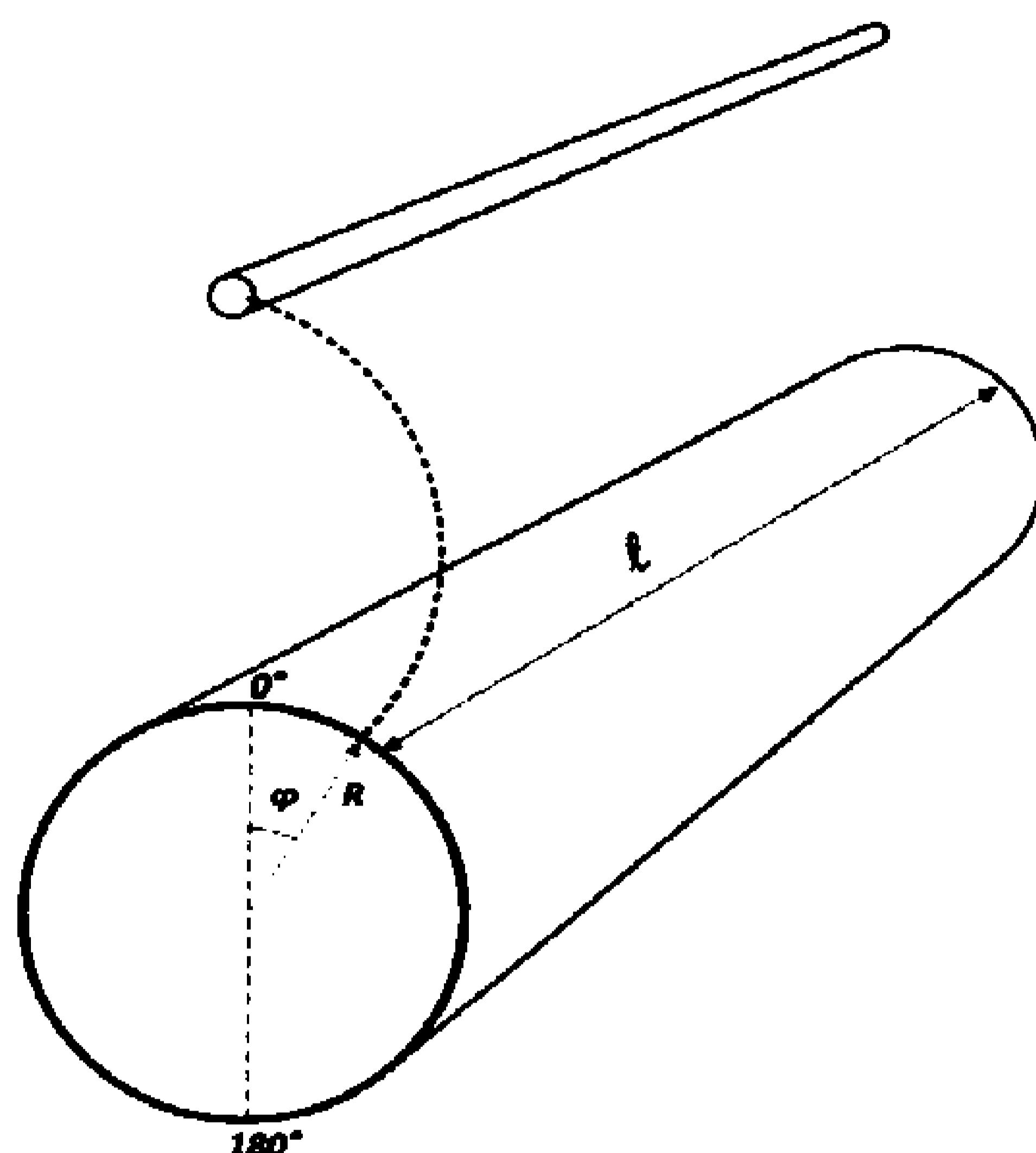
Παρακάτω φαίνεται η κατανομή της πυκνότητας ρεύματος J σε σχέση με τη γωνία αναχώρησης και πρόσπτωσης :



Εικόνα 5.6 : Κατανομή πυκνότητας ρεύματος J συναρτήσει των γωνιών αναχώρησης θ° και πρόσπτωσης ϕ° σε σχέση (α) με την απόσταση d των ηλεκτροδίων, ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$ ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$, (β) με την ακτίνα r του εκπομπού, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$ ακτίνα συλλέκτη $R=15\text{mm}$, (γ) με την ακτίνα R του συλλέκτη, ακτίνα εκπομπού $r=25\mu\text{m}$ απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$.

5.4 Υπολογισμός ρεύματος εκφόρτισης των ηλεκτροδίων.

Προκειμένου να γίνει υπολογισμός του ρεύματος των ηλεκτροδίων θεωρήθηκε διάταξη σύρμα-κύλινδρος μήκους $l=30cm$ όπως φαίνεται παρακάτω :



Εικόνα 5.7 : Διάταξη ηλεκτροδίων μήκους $l=30cm$

Έχοντας υπολογίσει την πυκνότητα ρεύματος J για τις διάφορες διατάξεις ηλεκτροδίων , έγινε υπολογισμός του ρεύματος των ηλεκτροδίων βάσει της σχέσης

$$I = 2 \int_{0^{\circ}}^{180^{\circ}} J R l d\varphi \quad (5.9)$$

όπως αυτή αναφέρεται από τους R.D Morrison & D.M Hopstock, 1979 :

Όπου

J = η πυκνότητα ρεύματος που υπολογίστηκε παραπάνω

R = ακτίνα καμπυλότητας του συλλέκτη

l = μήκος κυλίνδρου

ενώ η ολοκλήρωση στην σχέση (1.1) γίνεται ως προς τη γωνία πρόσπτωσης φ των σωματιδίων στην επιφάνεια του συλλέκτη.

Αποτελέσματα υπολογισμού του ρεύματος εκφόρτισης I , για διάταξη ηλεκτροδίων *Σύρμα – κύλινδρος*, με διαφορά δυναμικού σταθερή στα $1000V$, για διαφορετικές αποστάσεις d των ηλεκτροδίων, διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας R του συλλέκτη και r του εκπομπού.

Ακτίνα εκπομπού: $r=25\mu m$ Ακτίνα συλλέκτη: $R=15mm$

Απόσταση ηλεκτροδίων	Ρεύμα ηλεκτροδίων I (μA)
$d=1cm$	4
$d=2cm$	0.88
$d=3cm$	0.33
$d=4cm$	0.16
$d=5cm$	0.09

Πίνακας 5.6 : Ρεύμα ηλεκτροδίων I , σε σχέση με την απόσταση d των ηλεκτροδίων.

Απόσταση ηλεκτροδίων: $d=3cm$ Ακτίνα συλλέκτη: $R=15mm$

Ακτίνα καμπυλότητας εκπομπού r	Ρεύμα ηλεκτροδίων I (μA)
$r=25\mu m$	0.33
$r=50\mu m$	0.33
$r=100\mu m$	0.33
$r=250\mu m$	0.32
$r=500\mu m$	0.33
$r=1000\mu m$	0.32

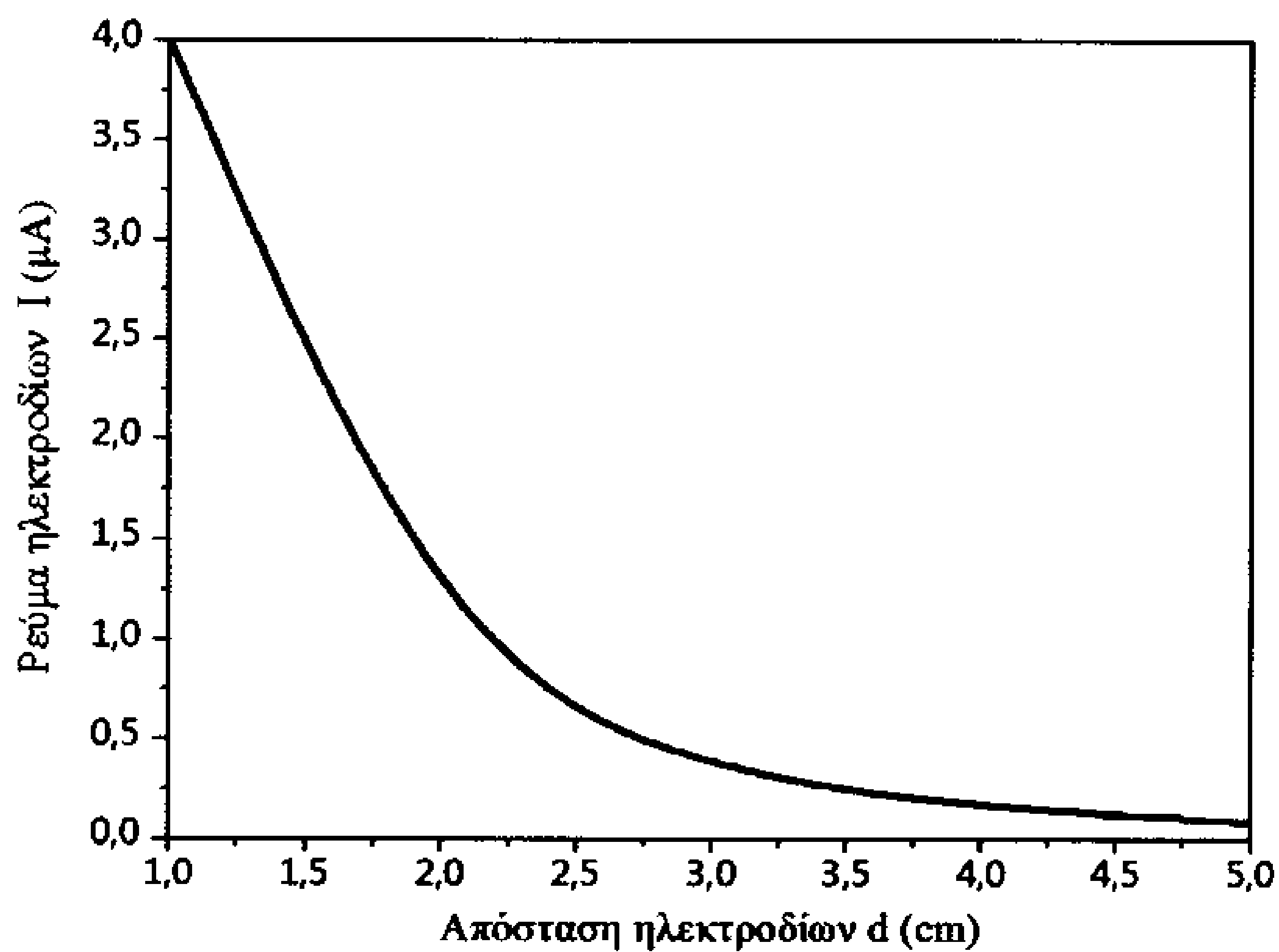
Πίνακας 5.7 : Ρεύμα ηλεκτροδίων I , σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας r του εκπομπού.

Ακτίνα εκπομπού: $r=25\mu m$ Απόσταση ηλεκτροδίων: $d=3cm$

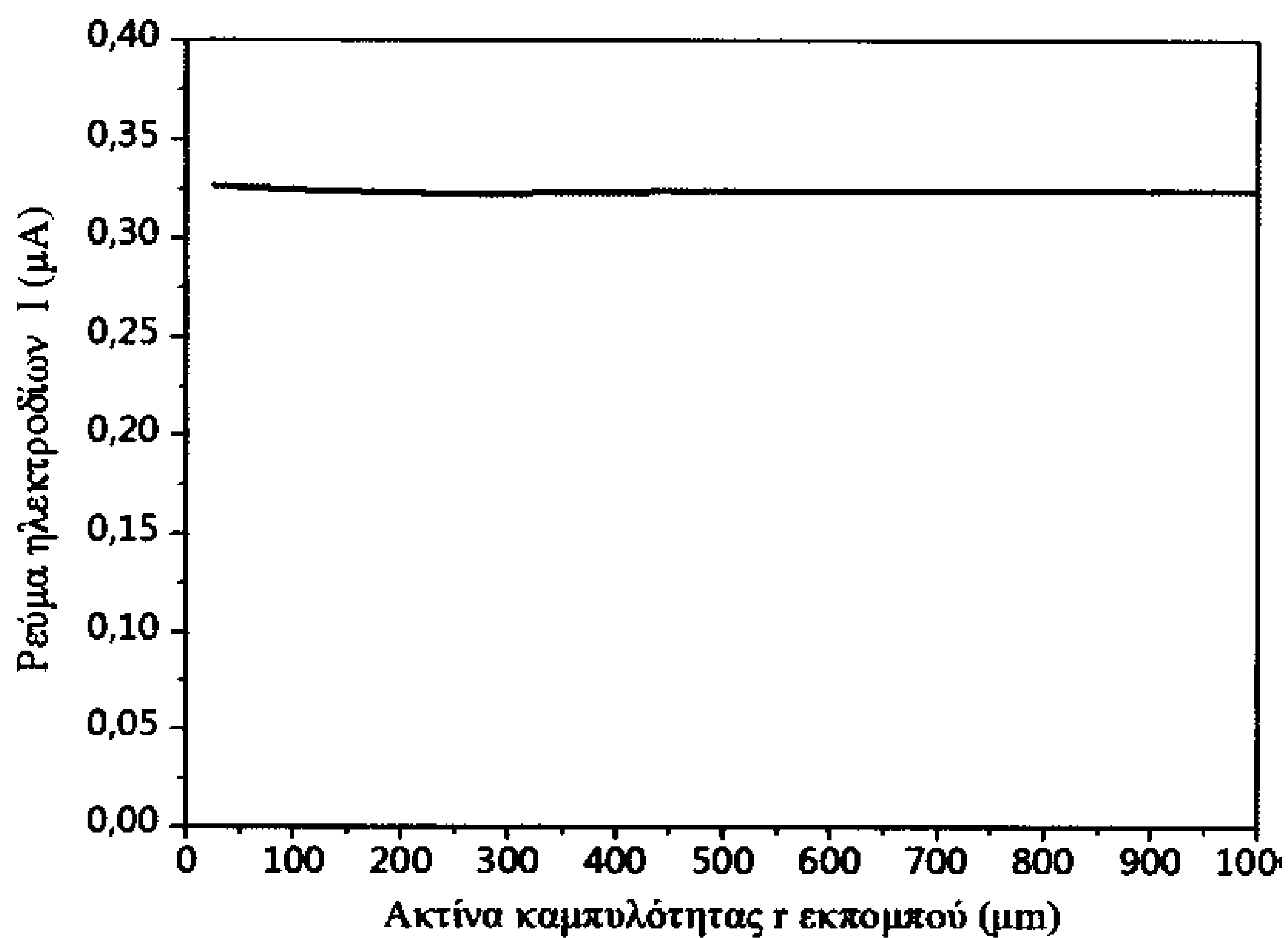
Ακτίνα καμπυλότητας συλλέκτη R	Ρεύμα ηλεκτροδίων I (μA)
$R=1mm$	0.04
$R=2mm$	0.08
$R=5mm$	0.17
$R=10mm$	0.26
$R=15mm$	0.33

Πίνακας 5.8 : Ρεύμα ηλεκτροδίων I , σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας R του συλλέκτη. 69

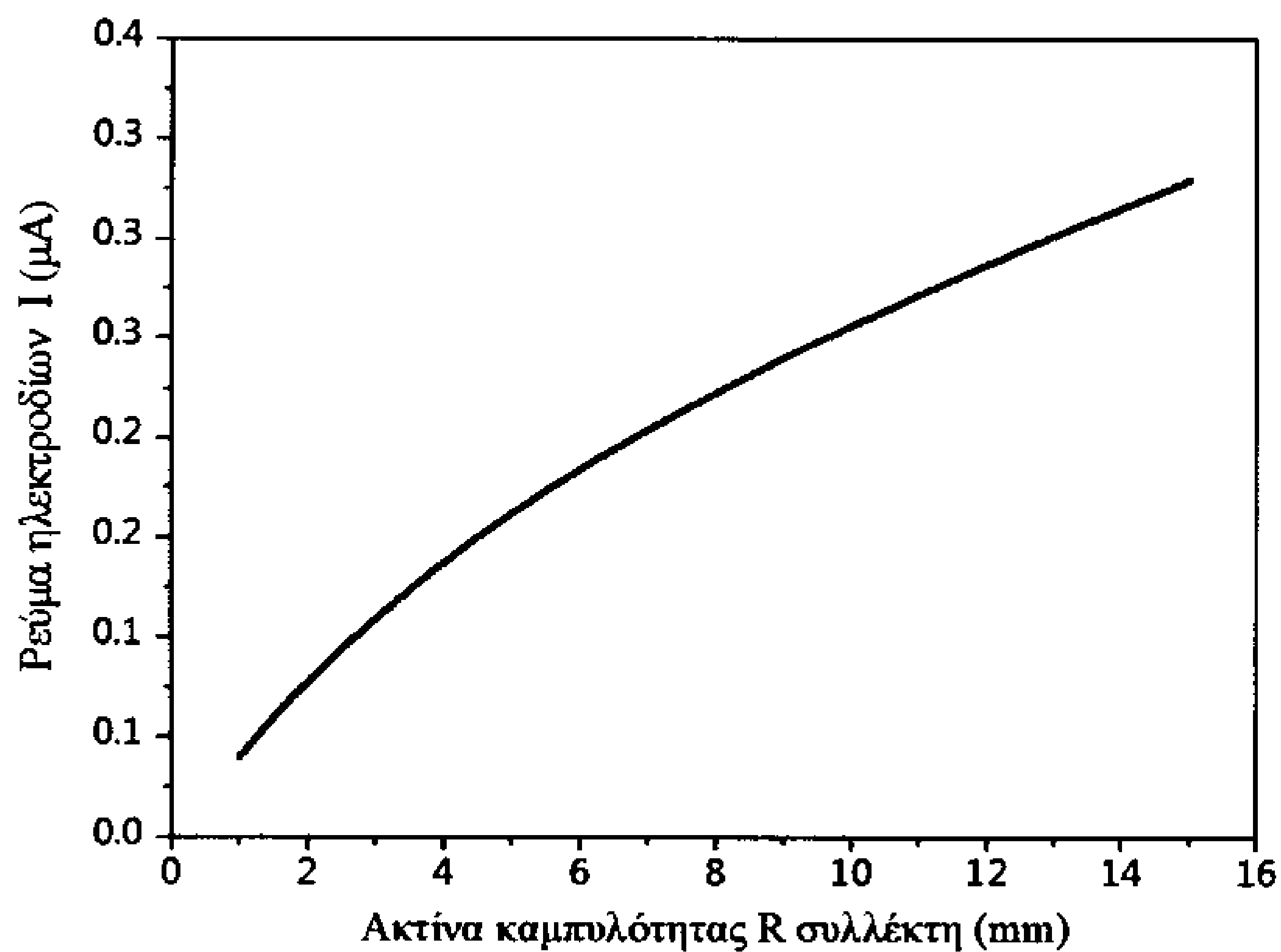
Μεταβολή ρεύματος ηλεκτροδίων I σε σχέση με τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ηλεκτροδίων:



Εικόνα 5.8 : Μεταβολή ρεύματος ηλεκτροδίων I, σε σχέση με την απόσταση d των ηλεκτροδίων.



Εικόνα 5.9 : Μεταβολή ρεύματος ηλεκτροδίων I, σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας r του εκπομπού.



Εικόνα 5.10: Μεταβολή ρεύματος ηλεκτροδίων I, σε σχέση με την ακτίνα καμπυλότητας R του συλλέκτη.

5.5 Σύγκριση ρεύματος ηλεκτροδίων I με πειραματικά δεδομένα.

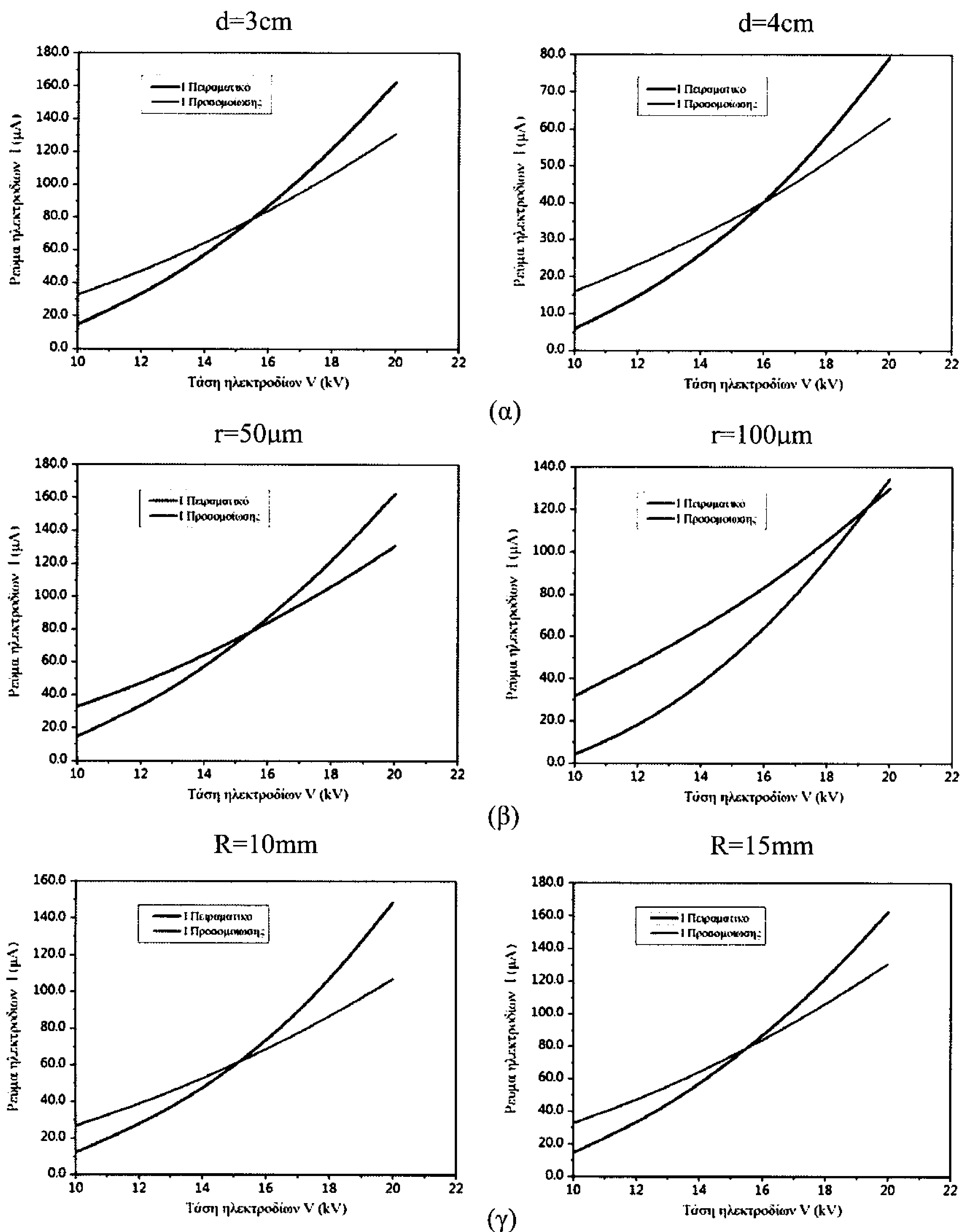
Προκειμένου να ελεγχθεί η ακρίβεια των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης για το ρεύμα εκφόρτισης I , έγινε επαλήθευση των αποτελεσμάτων με αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα από την εργασία της Maria C. Konstantinidi, 2011 για διάταξη ασύμμετρων ηλεκτροδίων.

Πραγματοποιήθηκαν τρία σεντ συγκρίσεων, για διαφορετικές αποστάσεις των ηλεκτροδίων, για διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας r του εκπομπού και για διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας R του συλλέκτη. Τα τρία σεντ των υπολογισμών έγιναν για διαφορές δυναμικού 10-20 KV.

	V (KV)	r (μm)	d (cm)	R (mm)
1 ^ο σεντ	10-20	50	3,4	15
2 ^ο σεντ	10-20	50,100	3	15
3 ^ο σεντ	10-20	50	3	10,15

Πίνακας 5.9 : Γεωμετρικά χαρακτηριστικά σύγκρισης διατάξεων ασύμμετρων ηλεκτροδίων

Παρακάτω γίνεται γραφική απεικόνιση του ρεύματος των ηλεκτροδίων της προσομοίωσης με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα για τις παραπάνω διατάξεις ηλεκτροδίων :



Εικόνα 5.11 : Σύγκριση ρεύματος ηλεκτροδίων I προσομοίωσης με πειραματικά δεδομένα σε σχέση (α) με την απόσταση d των ηλεκτροδίων, ακτίνα καμπυλότητας εκπομπού $r=50\mu\text{m}$ ακτίνα καμπυλότητας συλλέκτη $R=15\text{mm}$, (β) με την ακτίνα καμπυλότητας r του εκπομπού, απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$ ακτίνα καμπυλότητας συλλέκτη $R=15\text{mm}$, (γ) με την ακτίνα καμπυλότητας R του συλλέκτη, ακτίνα καμπυλότητας εκπομπού $r=50\mu\text{m}$ απόσταση ηλεκτροδίων $d=3\text{cm}$.

Από τα παραπάνω γραφήματα παρατηρούμε ότι υπάρχει ικανοποιητική σύγκλιση των θεωρητικών τιμών με τις πειραματικές, γεγονός που επιβεβαιώνει την ορθότητα της προσομοίωσης και του υπολογισμού του συνολικού ρεύματος βάσει της εξίσωσης (5.9) για το συνολικό ρεύμα.

Συμπεράσματα - Παρατηρήσεις:

Από την επεξεργασία των αποτελεσμάτων της προσομοίωσης (Κεφάλαιο 4) και τις ανάλυσης των δεδομένων (Κεφάλαιο 5) προέκυψαν τα παρακάτω :

Στο κεφάλαιο 4.2 έγινε επαλήθευση της κατανομής του ηλεκτρικού πεδίου, υπολογισμός των θεωρητικών τιμών για την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του (E_{max} & E_{min}) βάσει της βιβλιογραφίας (E. Kuffel, W.S Zaengl, J.Kuffel, 2000 και της σχέσης :

$$E_{max} = \frac{V}{d} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \left(\frac{d}{r}\right)}}{\ln \cdot \left(1 + \left(\frac{d}{2r}\right) + \sqrt{\left(\frac{d}{2r}\right)^2 + \left(\frac{d}{r}\right)}\right)} \quad (4.1)$$

και σύγκριση αυτών με τις αντίστοιχες τιμές από την προσομοίωση. Έτσι βρέθηκε ότι για διάταξη ηλεκτροδίων κύλινδρος – κύλινδρος υπήρχε απόκλιση των τιμών της τάξης του 0%, ενώ για διάταξη ηλεκτροδίων απόκλιση της τάξης του 0.37%, τιμή αποδεκτή ώστε να προχωρήσει η προσομοίωση.

Στο κεφάλαιο 5.1 έγινε υπολογισμός του μήκους των δυναμικών γραμμών μέσω των τροχιών των σωματιδίων, καθώς σύμφωνα με τη βιβλιογραφία τα ιονισμένα σωματίδια ακολουθούν τις δυναμικές γραμμές του πεδίου. (F.W Peek, 1915.). Από εκεί παρατηρήθηκε ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ηλεκτροδίων που παίζουν ρόλο στη διαμόρφωση των δυναμικών γραμμών είναι η απόσταση μεταξύ τους και η ακτίνα καμπυλότητας του κυλίνδρου (συλλέκτη). Αυτά τα δύο γεωμετρικά χαρακτηριστικά διαμορφώνουν μήκος της δυναμικής γραμμής αλλά και την γωνία με την οποία θα προσκρούσουν τα ιονισμένα σωματίδια στη επιφάνεια του συλλέκτη.

Στο κεφάλαιο 5.2 έγινε ανάλυση των τροχιών των σωματιδίων και επαληθεύτηκε ότι οι τροχιές των σωματιδίων σχηματίζουν κύκλους, όπως αναφέρεται από τον F.W Peek, 1915.

Στο κεφάλαιο 5.3 έγινε υπολογισμός της κατανομής της πυκνότητας ρεύματος βάσει της θεωρητικής σχέσης : (R.D Morrison & D.M Hopstock, 1979)

$$J = \mu * \epsilon_0 * \frac{V^2}{L^3} \quad (A/m^2) \quad (5.8)$$

και επαληθεύτηκε ότι ακολουθεί κατανομή weibull. Ακόμα παρατηρήθηκε ότι τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των ηλεκτροδίων που διαμορφώνουν την τιμή της πυκνότητας του ρεύματος είναι: η απόσταση d μεταξύ τους και η ακτίνα καμπυλότητας R του συλλέκτη.

Τέλος στο κεφάλαιο 5.4 έγινε υπολογισμός του ρεύματος των ηλεκτροδίων και παρατηρήθηκε ότι μεταβάλλοντας την απόσταση των ηλεκτροδίων και την ακτίνα καμπυλότητας R του συλλέκτη, μεταβάλλεται και η τιμή του ρεύματος των ηλεκτροδίων. Με σύγκριση που έγινε στο κεφάλαιο 5.5 παρατηρήθηκε σύγκλιση των θεωρητικών τιμών των ρευμάτων των ηλεκτροδίων της προσομοίωσης με τα αντίστοιχα πειραματικά δεδομένα. (Maria C. Konstantinidi, 2011)

Αναφορές :

Argyris J. H., October-November 1954, "Energy Theorems and Structural Analysis," Aircraft Eng., Vol. 26, October-November 1954, pp. 347–356, 383–387, 394.

Clough R.W, September 8-9-1960 "The Finite Element Method in Plane Stress Analysis," Proceedings of 2nd ASCE Conference on Electronic Computation, Pittsburgh, PA,.

Courant R., 1943, "Variational Methods for the Solutions of Problems of Equilibrium and Vibrations," Bull. Am. Math. Soc., Vol. 49, pp. 1–23.

Cravens D.J.,1990 "Electric propulsion study", (AL-TR-89-040). Edwards AFB, CA: Air Force Astronautics Lab;

Greenstadt J., 1959, "On the Reduction of Continuous Problems to Discrete Form," IBMJ. Res. Dev., Vol. 3, pp. 355–363.

Hayt W., Buck J., 2010, "Engineering Electromagnetics 8th edition", Published by McGraw-Hill, New York

Hrenikoff A, 1941, "Solution of Problems in Elasticity by the Framework Method," J. Appl. Mech., Vol. 8, pp. 169–175.

Huebner K. and Thornton E.A, 1982 The Finite Element Method for Engineers, Second Edition, John Wiley & Sons.

Kron G., 1944, "Tensorial Analysis and Equivalent Circuits of Elastic Structures," J. Franklin Inst., Vol. 238, No. 6, pp. 400–442.

Kuffel E., Zaengl W.S, Kuffel J., 2000, " High Voltage Engineering Fundamentals 2nd edition", Published by Newnes, Oxford

Lewis R.W., Nithiarasu P., Seetharamu K.N, 2004, "Fundamentals Of The Finite Element Method For Heat And Fluid Flow", Published by John Wiley & Sons Ltd, West Sussex-England

Liu G.R. and Quek S.S., 2003, "The Finite Element Method a Practical Course", Published by Butterworth and Heinemann, London

Lynikiene S. ,2001, "Carrot seed preparation in a corona discharge field". CIGR Journal of Scientific Research and Development.

Malan A.G , Lewis R.W and Nithiarasu P. , 2002 "An improved unsteady, unstructured, artificial compressibility, finite volume scheme for viscous incompressible flows", Part I - Theory and implementation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 54, pp. 695–714.

Maria C. Konstantinidi, 2011, "Study of Electro-Hydrodynamic Effect in Asymmetric High Voltage Capacitors", Dissertation, Heriot-Watt University.

Martins A.A, Pinheiro M.J.,2001 "Modeling of an EHD corona flow in nitrogen gas using an asymmetric capacitor for propulsion". Journal of Electrostatics. pp69:133-8.

Matthew N.O. Sadiku , 2007, "Elements of Electromagnetics" , Published by Oxford University Press

McHenry D., 1943, "A Lattice Analogy for the Solution of Plane Stress Problems," J. Inst. Civ. Eng., Vol. 21, pp. 59–82.

Moore A.D. 1973,"Electrostatics and its applications": Published by Wiley.

Morrison R.D & Hopstock D.M, 1979 "The Distribution of Current in Wire-to-Cylinder Corona", Journal of Electrostatics 6 , pp. 349-360.

Morse P. M. and Feshback H., 1953, "Methods of Theoretical Physics", McGraw-Hill, New York.

Newmark N. M., 1949, Numerical Methods of Analysis in Engineering, L. E. Grinter (ed.), Macmillan, New York,.

Ozisik M.N and Czisik M.N, 1994, "Finite Difference Methods in Heat Transfer", Published by CRC Press.

Patankar SV, 1980, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", Published by Hemisphere Publishers.

Peek F.W, 1915, "Dielectric Phenomena in High Voltage Engineering", Published by McGraw-Hill, New York

Prager W. and. Synge J. L, 1947, "Approximation in Elasticity Based on the Concept of Function Space," Q. Appl. Math., Vol. 5, pp. 241–269.

Rao S.S., 2004,"The Finite Element Method in Engineering", Published by Elsevier Science & Technology Books,

Reddy J.N,1993 "An Introduction to Finite Element Method, Second Edition," McGraw-Hill Book Company.

Roland W. Lewis, Perumal Nithiarasu, Kankanhally N. Seetharamu, 2004 "Fundamentals of the Finite Element Method", Published by John Wiley and Sons.

Ron Schmitt, 2002, "Electromagnetics Explained: A Handbook for Wireless/ RF, EMC, and High-Speed Electronics, Part of the EDN Series for Design Engineers", Published by Newnes, United States of America

Schmid H.J, Stolz S, Buggisch H., 2002 "Modelling of the electro-hydrodynamic flow field in electrostatic precipitators. Flow, Turbulence and Combustion." pp63-89.

Schwaiger. A. , 1922, “ A Contribution to the Electric Strength Theory”, Archive fur Electrotechnik,11, pp. 41-50

Townsend S.John, 1910, “The Theory of Ionization of Gases by Collision”, Published by Constable & Company LTD, London

Turner M.J, Clough R.W., Martin H. C., and. Topp L. C, 1956, “Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures,” J. Aeronaut. Sci., Vol. 23, No. 9, pp. 805–823, 854.

Velkoff H.R, Kulacki F.A.,1977 “Electrostatic cooling”. Chicago: ASME Design Engineering Conference;. pp. Paper 77-DE-36.

Wadhwa C.L, 2007, “ High Voltage Engineering”, Published by New Age International (P) Ltd., Publishers, New Delhi

Zienkiewicz O. C. and Cheung Y.K., 1965, “Finite Elements in the Solution of Field Problems,” Engineer, Vol. 220, pp. 507–510.

Zienkiewicz O.C and Cheung Y.K, 1965, “Finite Element in the solution of field problems” , Engineer, Vol 220, pp. 507-510

Zienkiewicz O.C and Taylor R.L, 2000, “The Finite Element Method, Vol. 1, The Basis”, Published by Butterworth and Heinemann, London.