

ΜΠΡΑΤΣΟΣ ΑΘΑΝΑΣΙΟΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Αριθμητική Ανάλυση

Μετασχηματισμός Laplace και Fourier

Διανυσματικός Διαφορικός Λογισμός

Επικαμπύλια και Επιφανειακά Ολοκληρώματα

Λύση των εξισώσεων του Maxwell

Γραμμική Άλγεβρα

και εφαρμογές του MATHEMATICA



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

ΣΙΣ.Δ
1977

ΔΩΡΕΑ

Μπράτσος Αθανάσιος

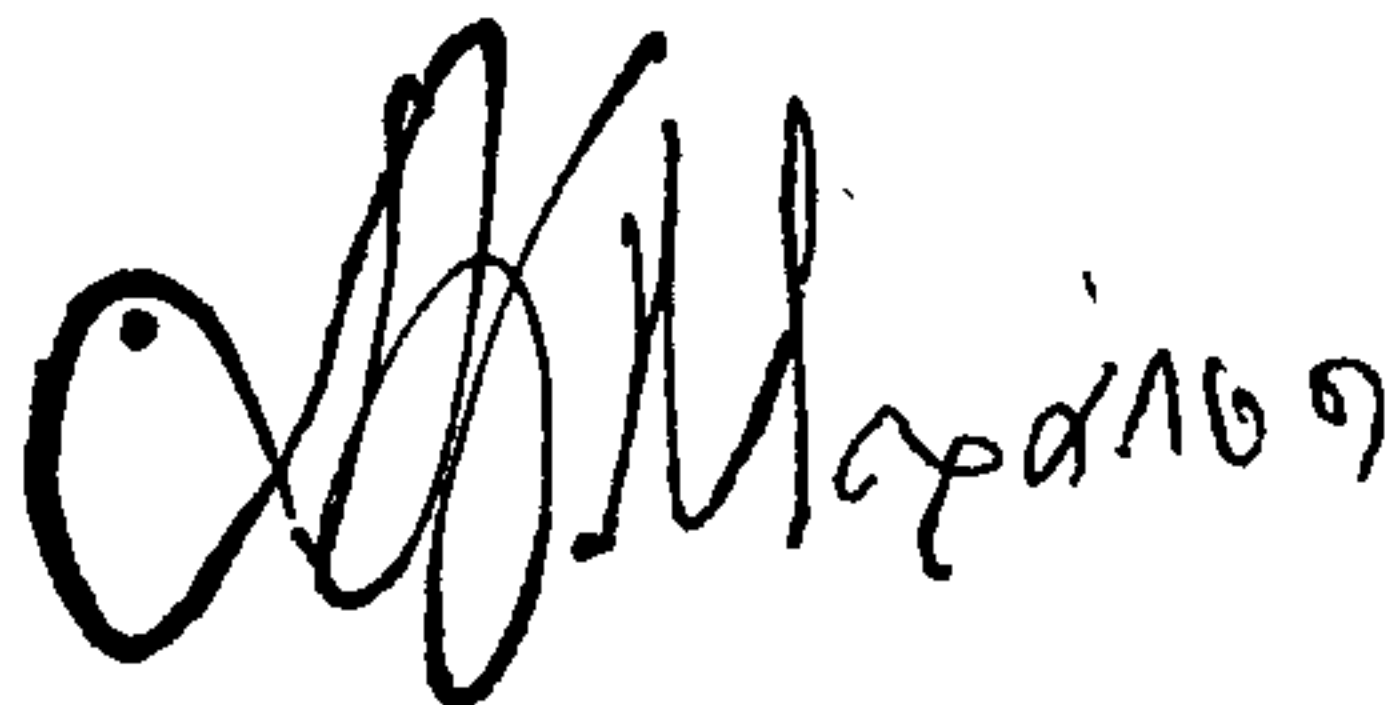
Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ
Αρ. εισ. 82916

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα.



Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με τρόπο μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή οποιονδήποτε άλλο σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης-Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν. 100/1975. Επίσης απαγορεύεται η αναπαραγωγή της στοιχειοθεσίας, της σελιδοποίησης, του εξωφύλλου και γενικότερα της εμφάνισης του βιβλίου με φωτοτυπικές, ηλεκτρονικές ή οποιεσδήποτε άλλες μεθόδους σύμφωνα με το άρθρο 51 του ν. 2121/1993 χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη.

© Copyright: Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε. - Αθανάσιος Μπράτσος • Αθήνα 2011

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΤΑΜΟΥΛΗ Α.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ:

ΑΘΗΝΑ: ΑΒΕΡΩΦ 2 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ.: 2105238305, FAX: 2105238959

ΧΟΝΔΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΗ:

ΑΘΗΝΑ: ΑΒΕΡΩΦ 5 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ.: 2105238305, FAX: 2105238959

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ:

ΑΘΗΝΑ: ΑΒΕΡΩΦ 2 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ.: 2105238305, FAX: 2105238959

ΠΕΙΡΑΙΑΣ: ΚΑΡΑΟΛΗ & ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ 87 Τ.Κ. 185 34 ΤΗΛ.: 2104227504, FAX: 2104227577
e-mail: info@stamoulis.gr Internet: www.stamoulis.gr

Στους γονείς μου
ως ελάχιστο δείγμα ευγνωμοσύνης

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο αυτό προορίζεται για τους φοιτητές της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης. Περιέχει στοιχεία από πέντε βασικούς κλάδους των Μαθηματικών και συγκεκριμένα τους Μετασχηματισμούς Laplace, την Ανάλυση Fourier, τη Διανυσματική Ανάλυση, τη Γραμμική Άλγεβρα και την Αριθμητική Ανάλυση. Ειδικά για την Αριθμητική Ανάλυση έχει γίνει προσπάθεια να δοθούν, με όσο το δυνατόν περισσότερο κατανοητό τρόπο, όλες εκείνες οι έννοιες που σε πρώτο επίπεδο είναι απαραίτητες σε κάθε φοιτητή.

Από τον τίτλο του βιβλίου αλλά και από την ανάπτυξη της επί μέρους ύλης γίνεται άμεσα κατανοητή η δυνατότητα ευρείας χρήσης των θεωρημάτων και των ειδικών μεθόδων των Μαθηματικών στους παραπάνω βασικούς κλάδους. Ειδικότερα έχει καταβληθεί προσπάθεια, ώστε το θεωρητικό μέρος του κάθε κεφαλαίου να έχει για κάθε περίπτωση την απαραίτητη ακριβολογία και πληρότητα. Τονίζεται ότι για να γίνουν περισσότερο κατανοητές οι μέθοδοι που αναφέρονται, θα πρέπει ο αναγνώστης, παράλληλα με τη θεωρία και τις εφαρμογές που δίνονται στο βιβλίο αυτό, να κάνει χρήση των μεθόδων σε δικές του εφαρμογές ή με τη βοήθεια προγραμμάτων όπως το MATHEMATICA, MATLAB κ.λπ. ή δικών του προγραμμάτων με τη βοήθεια Η.Υ.

Για την επίτευξη του παραπάνω σκοπού σε πολλές μεθόδους έχει γραφεί και ο αντίστοιχος αλγόριθμος. Επίσης υπάρχουν λύσεις προβλημάτων με το πρόγραμμα MATHEMATICA, οι οποίες εύκολα είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν και για τη λύση άλλων παρόμοιων. Ο τρόπος αυτός αντιμετώπισης των Μαθηματικών είναι πρωτοποριακός και θέλω να πιστεύω ότι θα αποτελέσει μία καλή αρχή για μία άλλη πιά σύγχρονη και περισσότερο κατανοητή αντιμετώπιση των μαθηματικών προβλημάτων.

Στην παρούσα έκδοση έχουν γίνει διορθώσεις και συμπληρώσεις της προηγούμενης με τίτλο ΕΦΗΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ και προσαρμογή των προγραμμάτων στην έκδοση 7 του MATHEMATICA.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω όλους όσους με βοήθησαν στην έκδοση αυτή.

Σεπτέμβριος 2011

Α. Μπράτσος

Περιεχόμενα

1	ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ LAPLACE	19
1.1	Ορισμός και ιδιότητες	20
1.2	Μετασχηματισμός περιοδικών συναρτήσεων	28
1.3	Συνάρτηση γάμμα	31
1.3.1	Υπολογισμός της $\Gamma(1/2)$	32
1.4	Μοναδιαία συνάρτηση του Heaviside	34
1.4.1	Εφαρμογή στον αντίστροφο μετασχηματισμό περιοδικής συνάρτησης	38
1.5	Συνάρτηση δέλτα του Dirac	40
1.6	Αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace	43
1.6.1	Με αναφορά στον πίνακα μετασχηματισμών	43
1.6.2	Με ανάλυση σε απλά κλάσματα	46
1.6.3	Συνέλιξη	51
1.7	Εφαρμογές στη λύση διαφορικών εξισώσεων	53
1.7.1	Γραμμική πρώτης τάξης	54
1.7.2	Γραμμική δεύτερης τάξης	62
1.7.3	Γραμμική διαφορική εξίσωση n -τάξης	80
1.8	Εφαρμογή της συνέλιξης στη λύση διαφορικών εξισώσεων	84
1.9	Λύση ολοκληρωτικών εξισώσεων	85
1.10	Λύση συστημάτων διαφορικών εξισώσεων	87
1.10.1	Εφαρμογές στον Ηλεκτρισμό	89
2	ΣΕΙΡΑ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FOURIER	93
2.1	Σειρά Fourier	93

2.2	Γραμμικά φάσματα	101
2.3	Σειρά άρτιων και περιττών συναρτήσεων	104
2.4	Εκθετική μορφή της σειράς Fourier	111
2.5	Ολοκλήρωμα Fourier	114
2.6	Μετασχηματισμός Fourier	121
2.6.1	Ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier	123
2.6.2	Συνέλιξη μετασχηματισμού Fourier	126
2.6.3	Μετασχηματισμός ημιτόνου και συνημιτόνου	129
3	ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ	133
3.1	Βαθμωτά και διανυσματικά πεδία	133
3.1.1	Επιφάνειες και γραμμές στάθμης	135
3.2	Παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης	136
3.2.1	Κανόνες παραγωγίσης	137
3.3	Μερική παράγωγος διανυσματικής συνάρτησης	138
3.4	Εφαρμογές διανυσματικού διαφορικού λογισμού	140
3.4.1	Παραμετρική παράσταση καμπυλών	140
3.4.2	Η έννοια της ταχύτητας και της επιτάχυνσης	143
3.5	Διευθυνόμενη παράγωγος	145
3.5.1	Κλίση συνάρτησης	146
3.5.2	Συντηρούμενα διανυσματικά πεδία	149
3.5.3	Απόκλιση	151
3.5.4	Φυσική ερμηνεία της απόκλισης	152
3.5.5	Τελεστής Laplace	155
3.5.6	Στροβιλισμός	159
3.5.7	Φυσική ερμηνεία του στροβιλισμού	161
3.5.8	Αστρόβιλα διανυσματικά πεδία	161
4	ΕΠΙΚΑΜΠΥΛΙΑ ΚΑΙ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ	165
4.1	Επικαμπύλια ολοκληρώματα	165
4.1.1	Γενίκευση της έννοιας του έργου	165
4.1.2	Ορισμός και υπολογισμός του επικαμπύλιου ολοκληρώματος	168
4.1.3	Μορφές επικαμπύλιου ολοκληρώματος	171

4.1.4	Ιδιότητες των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων	174
4.1.5	Σχέση επικαμπύλιου ολοκληρώματος και κλίσης	175
4.2	Παραμετρική παράσταση επιφάνειας	179
4.2.1	Ορισμός επιφάνειας	179
4.2.2	Θεμελιώδες διανυσματικό γινόμενο	181
4.3	Επιφανειακά ολοκληρώματα	183
4.3.1	Φυσική ερμηνεία και ορισμός	183
4.3.2	Μορφές επιφανειακού ολοκληρώματος	185
4.4	Σχετικά θεωρήματα	188
4.5	Εξισώσεις του Maxwell	197
4.5.1	Γενικές έννοιες	197
4.5.2	Εξίσωση συνέχειας	199
4.5.3	Πρώτη εξίσωση	200
4.5.4	Δεύτερη εξίσωση	201
4.5.5	Τρίτη εξίσωση	201
4.5.6	Τέταρτη εξίσωση	202
4.5.7	Η εξίσωση Poisson για ηλεκτροστατικό πεδίο	202
4.5.8	Λύση των εξισώσεων του Maxwell	203
4.5.9	Φυσική ερμηνεία της λύσης	205

5 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 209

5.1	Γενικές έννοιες	209
5.2	Μέθοδος του μέσου σημείου	211
5.3	Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων	215
5.4	Μέθοδος του Newton	223
5.4.1	Μέθοδος των χορδών	229
5.4.2	Μέθοδος της Regula Falsi	231
5.4.3	Άλλες μορφές της μεθόδου Newton	231
5.5	Μέθοδος του Aitken	237
5.5.1	Μέθοδος του Steffensen	241
5.6	Προσέγγιση των ριζών πολυωνύμου	244
5.6.1	Εισαγωγικές έννοιες	244
5.6.2	Σχήμα Horner	247

5.6.3	Μέθοδος του Müller	257
-------	--------------------	-----

6 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ **265**

6.1	Πίνακες	265
6.1.1	Ορισμός και αλγεβρική δομή	265
6.1.2	Πίνακες ειδικής μορφής	270
6.1.3	Ορίζουσες	281
6.1.4	Αντίστροφος πίνακας	284
6.1.5	Ειδικές κατηγορίες πινάκων	287
6.2	Norm διανυσμάτων και πινάκων	295
6.2.1	Norm διανυσμάτων	295
6.2.2	Norm πινάκων	307
6.3	Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα	311
6.3.1	Χαρακτηριστικά μεγέθη πίνακα	311
6.3.2	Ιδιότητες ιδιοτιμών	318
6.3.3	Ιδιοτιμές πινάκων ειδικής μορφής	319
6.3.4	Θεωρήματα επί των ιδιοτιμών	321
6.4	Προσέγγιση ιδιοτιμών	329
6.4.1	Μέθοδος των δυνάμεων	329
6.4.2	Μέθοδος των αντίστροφων δυνάμεων	332
6.4.3	Μετασχηματισμός Householder	334
6.4.4	QR Αλγόριθμος	338

7 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ **351**

7.1	Μορφές πολυωνύμων	351
7.2	Πολυωνυμική παρεμβολή	354
7.3	Διαιρεμένες διαφορές	358
7.4	Τύποι διαιρεμένων διαφορών	367
7.5	Υπολογισμός ακρίβειας σε παρεμβολή	376
7.6	Υπολογισμός σφάλματος σε παρεμβολή	378
7.7	Διακριτή προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων	384
7.8	Πολυωνυμική προσέγγιση ελάχιστων τετραγώνων	392
7.8.1	Εισαγωγικές έννοιες	392
7.8.2	Διαδικασία Gram-Schmidt	397

7.8.3	Προσέγγιση με τριγωνομετρικά πολυώνυμα	410
7.8.4	Μετασχηματισμός Fast Fourier	411
7.9	Προσέγγιση Padé	421
8	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	425
8.1	Γραμμικά συστήματα	425
8.1.1	Άμεσοι μέθοδοι	426
8.1.2	Επαναληπτικές μέθοδοι	441
8.1.3	Συστήματα με διαφορετικό πλήθος εξισώσεων από αγνώ- στους	452
8.2	Μη γραμμικά συστήματα	456
8.2.1	Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων	457
8.2.2	Μέθοδος του Newton	462
8.2.3	Μέθοδος του Broyden	468
8.2.4	Μέθοδος της μέγιστης κλίσης	474
9	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	481
9.1	Γενικές έννοιες	481
9.2	Αριθμητική παραγωγή	482
9.3	Αριθμητική ολοκλήρωση	488
9.3.1	Απλοί κανόνες ολοκλήρωσης	488
9.3.2	Σύνθετοι κανόνες	494
9.3.3	Κανόνας των 3/8	502
9.4	Προσαρμοσμένη ολοκλήρωση	504
9.5	Μέθοδος του Romberg	510
9.6	Κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss	515
9.6.1	Εισαγωγικές έννοιες	515
9.6.2	Ολοκλήρωση Gauss-Legendre	518
9.6.3	Ολοκλήρωση Chebyshev-Gauss	523
9.6.4	Ολοκλήρωση Gauss-Laguerre	525
9.6.5	Ολοκλήρωση Gauss-Hermite	527
9.7	Άλλοι τρόποι υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων	529
9.7.1	Αλλαγή μεταβλητής	529
9.7.2	Αποκοπή του διαστήματος ολοκλήρωσης	530

9.7.3	Με ανάπτυξη σε σειρά	530
9.8	Πολλαπλά ολοκληρώματα	532

10 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 545

10.1	Εισαγωγικές έννοιες	545
10.2	Μέθοδοι που βασίζονται στη σειρά Taylor	549
10.2.1	Συμβολισμοί	549
10.2.2	Μέθοδος του Euler	549
10.2.3	Μέθοδος του Taylor τάξης n	554
10.3	Μέθοδοι των Runge-Kutta	557
10.3.1	Μέθοδοι 1ης και 2ης τάξης	561
10.3.2	Μέθοδος 3ης τάξης	562
10.3.3	Μέθοδος 4ης τάξης	564
10.4	Μέθοδοι πολλαπλού βήματος	570
10.4.1	Δημιουργία μεθόδων πολλαπλού βήματος	571
10.4.2	Σύγκλιση	582
10.4.3	Τάξη, συμβατότητα και σφάλμα αποκοπής	583
10.4.4	Μηδενική ευστάθεια	585
10.4.5	Ασθενής ευστάθεια	588
10.5	Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης	596
10.6	Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	602

11 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ 607

11.1	Ταξινόμηση εξισώσεων δεύτερης τάξης	607
11.2	Τύποι πεπερασμένων διαφορών	608
11.3	Μονοδιάστατη εξίσωση διάδοσης θερμότητας	614
11.3.1	Προσεγγιστικές λύσεις	616
11.3.2	Τοπικό σφάλμα αποκοπής	620
11.3.3	Ευστάθεια	621
11.4	Διδιάστατη εξίσωση διάδοσης θερμότητας	625
11.4.1	Προσεγγιστικές λύσεις	629
11.5	Μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις	635

11.5.1	Εξίσωση διάχυσης-διαφυγής	637
11.5.2	Εξίσωση διάχυσης-μεταφοράς	639
A	ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL	643
A.1	Ορισμοί και είδη της εξίσωσης Bessel	643
B	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ MATHEMATICA	649
B.1	Αριθμητικές πράξεις	649
B.2	Συναρτήσεις	650
B.2.1	Ορισμοί	650
B.2.2	Αντίστροφη Συνάρτηση	650
B.2.3	Σύνθετη Συνάρτηση	650
B.2.4	Υπολογισμός οριακών τιμών	650
B.2.5	Γραφική παράσταση συνάρτησης	651
B.3	Βασικές εντολές του MATHEMATICA	653

Το βιβλίο αποτελείται από έντεκα κεφάλαια, στα οποία γίνεται μία πλήρης ανάλυση των σημαντικότερων εννοιών των Ανώτερων Μαθηματικών μαζί με μία σειρά εφαρμογών, έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει αφενός μεν μία πλήρη γνώση της θεωρίας και αφετέρου μία εκτεταμένη εικόνα των εφαρμογών της. Σε κάθε περίπτωση γίνεται λύση επιλεγμένων προβλημάτων με εντολές του προγράμματος MATHEMATICA v. 7.

Πιο συγκεκριμένα οι έννοιες που αναπτύσσονται στα επιμέρους κεφάλαια του βιβλίου είναι:

- ο μετασχηματισμός και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace και οι σημαντικότερες εφαρμογές του,
- η σειρά, το ολοκλήρωμα και ο μετασχηματισμός Fourier,
- οι βασικές έννοιες της κλίσης, απόκλισης, στροβιλισμού κ.λπ.,
- το επικαμπύλιο και το επιφανειακό ολοκλήρωμα, οι ιδιότητες, τα βασικά θεωρήματα και οι εφαρμογές των στη λύση των εξισώσεων του Maxwell.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν και αναφέρονται στην Αριθμητική Ανάλυση:

- οι βασικότερες μέθοδοι προσεγγιστικής λύσης εξισώσεων και συστημάτων,
- οι σημαντικότερες έννοιες και θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας,
- οι κυριότερες προσεγγιστικές μέθοδοι,
- η προσέγγιση παραγώγων και οι κυριότεροι κανόνες ολοκλήρωσης,
- οι βασικότερες μέθοδοι προσεγγιστικής λύσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και των εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Τέλος, στο Παράρτημα Α δίνονται οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης Bessel, ενώ στο Β οι βασικές έννοιες και εντολές του MATHEMATICA.

Ο συγγραφέας θέλει να πιστεύει, ότι με το βιβλίο αυτό δίνει στον φοιτητή των θετικών επιστημών ένα πλήρες βιβλίο, στις σελίδες του οποίου καταγράφονται και αναλύονται οι σημαντικότερες έννοιες των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.

7.8.3	Προσέγγιση με τριγωνομετρικά πολυώνυμα	410
7.8.4	Μετασχηματισμός Fast Fourier	411
7.9	Προσέγγιση Padé	421
8	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ	425
8.1	Γραμμικά συστήματα	425
8.1.1	Άμεσοι μέθοδοι	426
8.1.2	Επαναληπτικές μέθοδοι	441
8.1.3	Συστήματα με διαφορετικό πλήθος εξισώσεων από αγνώ- στους	452
8.2	Μη γραμμικά συστήματα	456
8.2.1	Μέθοδος των διαδοχικών προσεγγίσεων	457
8.2.2	Μέθοδος του Newton	462
8.2.3	Μέθοδος του Broyden	468
8.2.4	Μέθοδος της μέγιστης κλίσης	474
9	ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ ΚΑΙ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ	481
9.1	Γενικές έννοιες	481
9.2	Αριθμητική παραγωγή	482
9.3	Αριθμητική ολοκλήρωση	488
9.3.1	Απλοί κανόνες ολοκλήρωσης	488
9.3.2	Σύνθετοι κανόνες	494
9.3.3	Κανόνας των 3/8	502
9.4	Προσαρμοσμένη ολοκλήρωση	504
9.5	Μέθοδος του Romberg	510
9.6	Κανόνες ολοκλήρωσης του Gauss	515
9.6.1	Εισαγωγικές έννοιες	515
9.6.2	Ολοκλήρωση Gauss-Legendre	518
9.6.3	Ολοκλήρωση Chebyshev-Gauss	523
9.6.4	Ολοκλήρωση Gauss-Laguerre	525
9.6.5	Ολοκλήρωση Gauss-Hermite	527
9.7	Άλλοι τρόποι υπολογισμού γενικευμένων ολοκληρωμάτων	529
9.7.1	Αλλαγή μεταβλητής	529
9.7.2	Αποκοπή του διαστήματος ολοκλήρωσης	530

9.7.3	Με ανάπτυξη σε σειρά	530
9.8	Πολλαπλά ολοκληρώματα	532

10 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΣΥΝΗΘΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ 545

10.1	Εισαγωγικές έννοιες	545
10.2	Μέθοδοι που βασίζονται στη σειρά Taylor	549
10.2.1	Συμβολισμοί	549
10.2.2	Μέθοδος του Euler	549
10.2.3	Μέθοδος του Taylor τάξης n	554
10.3	Μέθοδοι των Runge-Kutta	557
10.3.1	Μέθοδοι 1ης και 2ης τάξης	561
10.3.2	Μέθοδος 3ης τάξης	562
10.3.3	Μέθοδος 4ης τάξης	564
10.4	Μέθοδοι πολλαπλού βήματος	570
10.4.1	Δημιουργία μεθόδων πολλαπλού βήματος	571
10.4.2	Σύγκλιση	582
10.4.3	Τάξη, συμβατότητα και σφάλμα αποκοπής	583
10.4.4	Μηδενική ευστάθεια	585
10.4.5	Ασθενής ευστάθεια	588
10.5	Συστήματα διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης	596
10.6	Διαφορικές εξισώσεις ανώτερης τάξης	602

11 ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΤΙΚΗ ΛΥΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΜΕΡΙΚΕΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥΣ 607

11.1	Ταξινόμηση εξισώσεων δεύτερης τάξης	607
11.2	Τύποι πεπερασμένων διαφορών	608
11.3	Μονοδιάστατη εξίσωση διάδοσης θερμότητας	614
11.3.1	Προσεγγιστικές λύσεις	616
11.3.2	Τοπικό σφάλμα αποκοπής	620
11.3.3	Ευστάθεια	621
11.4	Διδιάστατη εξίσωση διάδοσης θερμότητας	625
11.4.1	Προσεγγιστικές λύσεις	629
11.5	Μη γραμμικές παραβολικές εξισώσεις	635

11.5.1	Εξίσωση διάχυσης-διαφυγής	637
11.5.2	Εξίσωση διάχυσης-μεταφοράς	639
A	ΕΞΙΣΩΣΗ BESSEL	643
A.1	Ορισμοί και είδη της εξίσωσης Bessel	643
B	ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟ MATHEMATICA	649
B.1	Αριθμητικές πράξεις	649
B.2	Συναρτήσεις	650
B.2.1	Ορισμοί	650
B.2.2	Αντίστροφη Συνάρτηση	650
B.2.3	Σύνθετη Συνάρτηση	650
B.2.4	Υπολογισμός οριακών τιμών	650
B.2.5	Γραφική παράσταση συνάρτησης	651
B.3	Βασικές εντολές του MATHEMATICA	653

Το βιβλίο αποτελείται από έντεκα κεφάλαια, στα οποία γίνεται μία πλήρης ανάλυση των σημαντικότερων εννοιών των Ανώτερων Μαθηματικών μαζί με μία σειρά εφαρμογών, έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει αφενός μεν μία πλήρη γνώση της θεωρίας και αφετέρου μία εκτεταμένη εικόνα των εφαρμογών της. Σε κάθε περίπτωση γίνεται λύση επιλεγμένων προβλημάτων με εντολές του προγράμματος MATHEMATICA v. 7.

Πιο συγκεκριμένα οι έννοιες που αναπτύσσονται στα επιμέρους κεφάλαια του βιβλίου είναι:

- ο μετασχηματισμός και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Laplace και οι σημαντικότερες εφαρμογές του,
- η σειρά, το ολοκλήρωμα και ο μετασχηματισμός Fourier,
- οι βασικές έννοιες της κλίσης, απόκλισης, στροβιλισμού κ.λπ.,
- το επικαμπύλιο και το επιφανειακό ολοκλήρωμα, οι ιδιότητες, τα βασικά θεωρήματα και οι εφαρμογές των στη λύση των εξισώσεων του Maxwell.

Στα κεφάλαια που ακολουθούν και αναφέρονται στην Αριθμητική Ανάλυση:

- οι βασικότερες μέθοδοι προσεγγιστικής λύσης εξισώσεων και συστημάτων,
- οι σημαντικότερες έννοιες και θεωρήματα της γραμμικής άλγεβρας,
- οι κυριότερες προσεγγιστικές μέθοδοι,
- η προσέγγιση παραγώγων και οι κυριότεροι κανόνες ολοκλήρωσης,
- οι βασικότερες μέθοδοι προσεγγιστικής λύσης των συνήθων διαφορικών εξισώσεων και των εξισώσεων με μερικές παραγώγους.

Τέλος, στο Παράρτημα Α δίνονται οι κυριότερες μορφές της εξίσωσης Bessel, ενώ στο Β οι βασικές έννοιες και εντολές του MATHEMATICA.

Ο συγγραφέας θέλει να πιστεύει, ότι με το βιβλίο αυτό δίνει στον φοιτητή των θετικών επιστημών ένα πλήρες βιβλίο, στις σελίδες του οποίου καταγράφονται και αναλύονται οι σημαντικότερες έννοιες των Εφαρμοσμένων Μαθηματικών.