

Α. Δημητριάδης - Χ. Κοίλιας

# ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΗ ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ

Μοντέλα

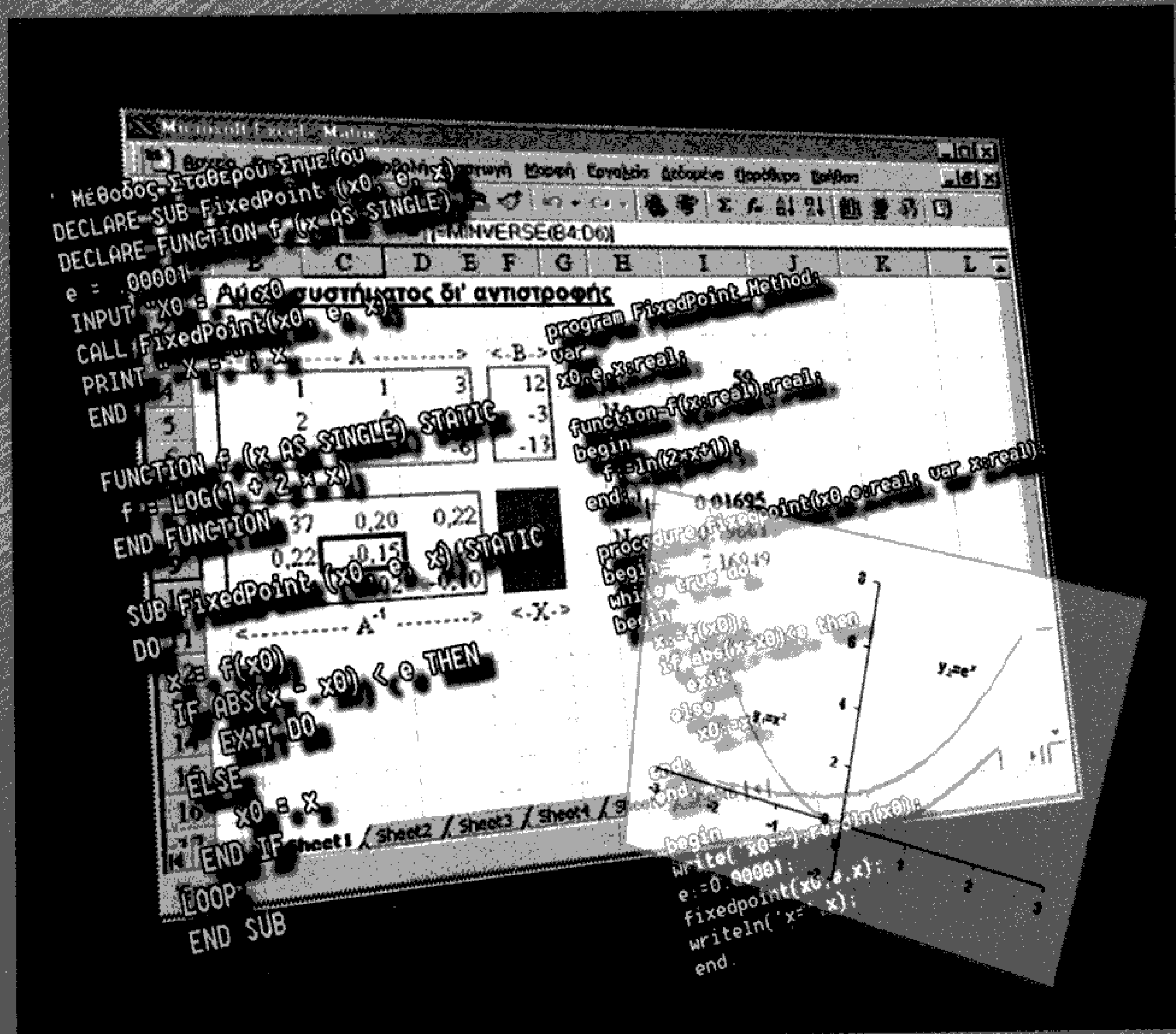
Προγράμματα σε Qbasic και TPascal

Αλγόριθμοι

Παραδείγματα και Ασκήσεις

Μελέτη Σφάλματος

Επίλυση με το Excel



Αθήνα

# Εφαρμοσμένη Αριθμητική Ανάλυση

515  
ΔΗΜ

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ  
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ  
Αρ. εισ. 6343

Αντώνης Δημητριάδης – Χρήστος Κοίλιας

Έργο: Ενίσχυση και εμπλουτισμός  
των Δημοτικών Βιβλιοθηκών  
ΠΣ 5 755

Η συλλογή της Βιβλ. εθνικής συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση σε ποσοστό 75% και 25% από εθνικούς μας πόρους.

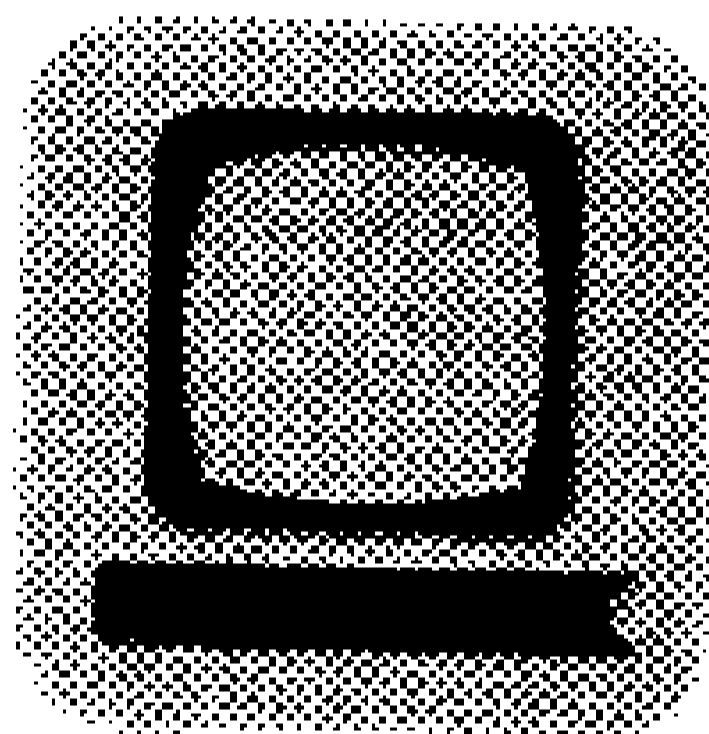
## Εφαρμοσμένη Αριθμητική Ανάλυση

Αθήνα

Κάθε γνήσιο αντίγραφο έχει την υπογραφή των συγγραφέων

Έκδοση 1η, Copyright © 1998  
Ανατύπωση: 2001

ISBN 960-7981-01-4



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΝΕΩΝ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΩΝ**

**Στουρνάρη 49Α, 106 82 Αθήνα**

**Τηλ.: 3845594 - Fax: 3808009**

**[www.newtech-publications.gr](http://www.newtech-publications.gr)**

**e-mail: [contact@newtech-publications.gr](mailto:contact@newtech-publications.gr)**

Απαγορεύεται η με οποιονδήποτε τρόπο ανατύπωση, καταχώρηση σε σύστημα αποθήκευσης και επανάκτησης ή μετάδοση με κάθε μορφή και μέσο (ηλεκτρονικό, μηχανικό, φωτοαντιγραφικό κ.λπ.) του συνόλου ή μέρους του βιβλίου αυτού, χωρίς την έγγραφη άδεια του εκδότη.

## Περιεχόμενα

Πρόλογος.....	13
---------------	----

### Πρώτο Μέρος : Προκαταρκτικές Έννοιες

#### Κεφάλαιο 1ο: Αλγοριθμική

1.1 Περιγραφή Αλγορίθμων.....	19
1.2 Παράσταση Αλγορίθμων.....	22
1.2.1 Δομές Ελέγχου.....	22
1.2.2 Διαγράμματα Ροής.....	23
1.2.3 Ψευδογλώσσα ή Ψευδοκώδικας.....	23
1.3 Προβλήματα, Αλγόριθμοι και Λύσεις.....	28
1.3.1 Είδη Προβλημάτων.....	28
1.3.2 Αντιστοιχία Προβλήματος και Αλγόριθμου.....	29
1.3.3 Σύγκλιση Αλγόριθμου.....	29
1.3.4 Είδη Αλγορίθμων.....	30

#### Κεφάλαιο 2ο : Ανάλυση Σφαλμάτων

2.1 Πηγές Σφαλμάτων.....	33
2.1.1 Διακεκριμενοποίηση του Προβλήματος.....	33
2.1.2 Αποκοπή και Στρογγυλοποίηση.....	35
2.1.3 Δεδομένα Εισόδου Περιέχοντα Σφάλμα.....	37
2.1.4 Η Λειτουργία του Η/Υ.....	37
2.1.5 Επιλογή Αλγόριθμου.....	42
2.2 Εκτίμηση Σφάλματος Υπολογισμού.....	42
2.2.1 Εκτίμηση Σφάλματος όταν είναι Γνωστή η Πραγματική Τιμή.....	43
2.2.2 Εκτίμηση Σφάλματος όταν δεν είναι Γνωστή η Πραγματική Τιμή.....	45

2.3 Εξέλιξη Σφαλμάτων.....	45
2.3.1 Πρόσθεση.....	46
2.3.2 Λοιπές Πράξεις.....	47
2.3.3 Συναρτήσεις.....	47
2.3.4 Επαναληπτικές Διαδικασίες.....	48
2.3.5 Ευστάθεια Μοντέλων.....	49
2.4 Έννοια της Προσέγγισης.....	50
Ασκήσεις.....	53

## Δεύτερο Μέρος : Επίλυση εξισώσεων

### Κεφάλαιο 3ο : Γενική Θεώρηση της Επίλυσης

3.1 Υπολογισμός Αρχικών Τιμών.....	59
3.1.1 Επιλογή Αρχικού διαστήματος.....	60
3.1.2 Επιλογή Αρχικής Τιμής.....	62
3.2 Κριτήρια Διακοπής.....	63
3.2.1 Ανώμαλη Διακοπή.....	63
3.2.2 Ομαλή Διακοπή.....	64
3.3 Ευστάθεια Μοντέλου.....	64
3.4 Εύρεση Αρχικών Τιμών με Υπολογιστή.....	65

### Κεφάλαιο 4ο : Μέθοδοι με Διαστήματα

4.1 Μέθοδος της Διχοτόμου ή Bolzano.....	75
4.2 Μέθοδος της Εσφαλμένης Θέσης.....	79

### Κεφάλαιο 5ο : Μέθοδοι με Αρχικές Τιμές

5.1 Μέθοδος του Σταθερού Σημείου.....	86
5.2 Μέθοδος Newton-Raphson.....	92
5.3 Μέθοδος της Τέμνουσας.....	100
5.4 Επίλυση με τη Χρήση του Solver.....	103
5.5 Σύγκριση Μεθόδων.....	105

## Κεφάλαιο 6ο : Πολυωνυμικές Εξισώσεις

6.1 Σχήμα Horner .....	107
6.2 Εφαρμογή του Σχήματος Horner.....	108
6.2.1 Υπολογισμός του $P_n(x_0)$ .....	108
6.2.2 Υπολογισμός της $k$ τάξεως Παραγώγου του $P_n(x_0)$ .....	109
6.2.3 Σχήμα Horner και Μέθοδος Newton-Raphson .....	110
Ασκήσεις.....	112

## Τρίτο Μέρος : Επίλυση συστημάτων

### Κεφάλαιο 7ο : Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων

7.1 Στοιχεία από τη Θεωρία Πινάκων .....	120
7.1.1 Ορισμοί .....	120
7.1.2 Άλγεβρα Πινάκων.....	122
7.1.3 Νόρμες Πίνακα .....	123
7.1.4 Ιδιοτιμές, Φασματική Ακτίνα .....	124
7.2 Κατάσταση Γραμμικών Συστημάτων .....	124
7.2.1 Σφάλμα και Αριθμός Κατάστασης.....	124
7.2.2 Ευστάθεια Συστήματος.....	127
7.2.3 Συμπεράσματα .....	130
7.3 Άμεσες Μέθοδοι Επίλυσης.....	131
7.3.1 Μέθοδος του Gauss.....	131
Υπολογισμός της Ορίζουσας του $A$ .....	139
7.3.2 Μέθοδος Jordan .....	139
Αντιστροφή Πίνακα .....	139
7.3.3 Παραγοντοποίηση LU .....	141
7.3.4 Επίλυση με το Excel .....	147
7.4 Επαναληπτικές Μέθοδοι .....	149
7.4.1 Μέθοδος Jacobi .....	150
7.4.2 Μέθοδος Gauss - Seidel .....	157
7.4.3 Χρήση του Solver του Excel .....	163

**Κεφάλαιο 8ο : Συστήματα μη Γραμμικών Εξισώσεων**

8.1 Ιακωβιανός Πίνακας.....	166
8.2 Μέθοδος του Σταθερού Σημείου.....	166
8.3 Μέθοδος Newton.....	172
8.4 Χρήση του Solver του Excel.....	177

**Κεφάλαιο 9ο : Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα**

9.1 Γενικά Περί Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων.....	179
9.2 Μέθοδος των Δυνάμεων.....	182
9.2.1 Προσέγγιση της Απολύτως Μεγαλύτερης Ιδιοτιμής.....	182
9.2.2 Προσέγγιση της Απολύτως Μικρότερης Ιδιοτιμής.....	185
9.3 Προσέγγιση όλων των Ιδιοτιμών.....	187
9.3.1 Γενική Περίπτωση.....	187
9.3.2 Συμμετρικοί Πίνακες.....	189
9.4 Αντίστροφη Μέθοδος των Δυνάμεων.....	190
9.4.1 Προσέγγιση Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων.....	191
9.4.2 Προσδιορισμός της Αρχικής Τιμής.....	194
9.5 Συνοδεύων Πίνακας του Frobenius.....	195
9.6 Επίλυση με το Excel.....	196
Ασκήσεις.....	198

**Τέταρτο Μέρος : Προσέγγιση Συναρτήσεων****Κεφάλαιο 10ο : Προσέγγιση με Πολυωνυμική Παρεμβολή**

10.1 Σφάλμα Πολυωνυμικής Παρεμβολής.....	205
10.2 Παρεμβολή Langrange.....	206
10.3 Παρεμβολή Newton.....	213
10.4 Παρεμβολή Aitken.....	218
10.5 Προβλήματα Παρεμβολής.....	222
10.6 Επίλυση με το Excel.....	225
10.6.1 Γραμμική Παρεμβολή.....	225
10.6.2 Κυβική Παρεμβολή.....	227



10.6.3 Παρεμβολή Newton .....	229
10.6.4 Παρεμβολή Aitken .....	230
<b>Κεφάλαιο 11ο : Προσέγγιση με Φυσική Κυβική Splines</b>	
11.1 Έννοια των Splines .....	233
11.2 Φυσική Κυβική Spline .....	234
<b>Κεφάλαιο 12ο : Προσέγγιση με τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων</b>	
12.1 Προσέγγιση Διακεκριμένων Σημείων .....	243
12.1.1 Περιγραφή της Μεθόδου .....	243
12.1.2 Πολυωνυμική Προσέγγιση .....	244
12.1.3 Εκθετική Προσέγγιση .....	248
12.1.4 Ποιότητα Προσαρμογής - Ο Δείκτης Προσδιορισμού $R^2$ .....	250
12.1.5 Το Γενικό Μοντέλο .....	251
12.1.6 Επιλογή της Καμπύλης Παλινδρόμησης .....	255
12.2 Προσέγγιση Συνεχούς Συνάρτησης .....	256
12.2.1 Περιγραφή της Μεθόδου .....	256
12.2.2 Πολυωνυμική Προσέγγιση .....	256
12.2.3 Εκθετική Προσέγγιση .....	257
12.3 Προσαρμογή της Καμπύλης .....	259
12.4 Επίλυση με το Excel .....	261
12.4.1 Καμπύλη Τάσης .....	262
12.4.2 Χρήση Έτοιμων Συναρτήσεων .....	264
12.4.3 Χρήση του Solver .....	266
12.4.4. Πολλαπλή Παλινδρόμηση .....	268
Ασκήσεις .....	270

## Πέμπτο μέρος : Αριθμητική Παραγωγή και Ολοκλήρωση

### Κεφάλαιο 13ο :Αριθμητική Παραγωγή

13.1 Άμεση Προσέγγιση της Παραγώγου .....	278
13.1.1 Πηλίκον Ανιούσας Διαφοράς .....	278
13.1.2 Τύποι Κεντρικής Διαφοράς .....	279
13.2 Χρήση Πολυωνύμων Παρεμβολής .....	282
13.2.1 Παραγωγή με τα Πολυώνυμα Langrange .....	283
13.2.2 Παραγωγή με τα Πολυώνυμα Newton .....	286
13.2.3 Παραγωγή Συνεχών Συναρτήσεων .....	289

### Κεφάλαιο 14ο :Αριθμητική Ολοκλήρωση

14.1 Ολοκλήρωση με Πολυωνυμική Παρεμβολή .....	292
14.1.1 Μέθοδοι Newton-Cotes .....	292
Κανόνας του Τραπεζίου .....	293
Κανόνας του Simpson .....	294
Κανόνας των 3/8 .....	295
Κανόνας του Romberg .....	295
Κανόνας των Εννέα Σημείων .....	295
Μελέτη Σφάλματος .....	295
14.1.2 Σύνθετοι Κανόνες Ολοκλήρωσης .....	299
Σύνθετος Κανόνας του Τραπεζίου .....	299
Σύνθετος Κανόνας του Simpson .....	299
Μελέτη Σφάλματος .....	300
14.2 Προσαρμοσμένη Ολοκλήρωση .....	307
14.2.1 Προσαρμοσμένη Ολοκλήρωση του Τραπεζίου .....	307
14.2.2 Προσαρμοσμένη Ολοκλήρωση του Simpson .....	308
14.3 Ολοκλήρωση του Romberg .....	310
14.4 Γενικευμένα και Πολλαπλά Ολοκληρώματα .....	316
14.4.1 Γενικευμένα Ολοκληρώματα .....	317
14.4.2 Πολλαπλά Ολοκληρώματα .....	318
Ασκήσεις .....	320

## Έκτο Μέρος : Επίλυση Διαφορικών Εξισώσεων

### Κεφάλαιο 15ο : Το Πρόβλημα των Αρχικών Τιμών

15.1 Βασικά Σημεία Προσοχής Κατά την Αριθμητική Επίλυση .....	327
15.1.1 Ύπαρξη Μοναδικής Λύσης .....	328
15.1.2 Επιλογή Μεθόδου Επίλυσης και Σφάλμα .....	328
15.1.3 Ευστάθεια Λύσης .....	329
15.2 Μονοβηματικές Μέθοδοι .....	330
15.2.1. Μέθοδος Euler .....	330
15.2.2 Μέθοδοι Runge-Kutta .....	334
Μέθοδοι Runge-Kutta 2ης Τάξης .....	335
Μέθοδος Runge-Kutta 4ης Τάξης .....	335
Παραδείγματα .....	336
15.3 Πολυβηματικές μέθοδοι .....	341
15.3.1 Μέθοδος Adams-Bashforth .....	341
15.3.2 Μέθοδος Adams-Moulton .....	342
15.3.3 Μέθοδοι Πρόβλεψης-Διόρθωσης .....	342
15.3.4 Παραδείγματα .....	345
15.4 Σύγκριση Μονοβηματικών και Πολυβηματικών Μεθόδων .....	348

### Κεφάλαιο 16ο : Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων

16.1 Συστήματα Διαφορικών Εξισώσεων Πρώτης Τάξης .....	351
16.1.1 Μέθοδος Euler .....	352
16.1.2. Μέθοδος Runge-Kutta 4ης τάξης .....	355
16.1.3 Ευστάθεια Συστημάτων .....	358
16.2 Διαφορικές Εξισώσεις Ανώτερης Τάξης .....	359

### Κεφάλαιο 17ο : Το Πρόβλημα των Συνοριακών Τιμών

17.1 Γραμμική Μέθοδος της Σκόπτευσης .....	364
17.2 Μέθοδος των Πεπερασμένων Διαφορών .....	368
Ασκήσεις .....	371

<b>Βιβλιογραφία</b> .....	375
---------------------------	-----

<b>Απαντήσεις ασκήσεων</b> .....	377
----------------------------------	-----

<b>Ευρετήριο</b> .....	385
------------------------	-----

## Πρόλογος

Είναι γεγονός ότι στη σημερινή εποχή όλο και περισσότερο γίνεται χρήση των μεθόδων της Αριθμητικής Ανάλυσης από πλήθος χρηστών Η/Υ (σπουδαστές, τεχνικοί, επιστήμονες κ.λπ.), δεδομένου ότι οι Η/Υ χρησιμοποιούνται πλέον ευρύτατα σε κάθε επίπεδο της εκπαίδευσης αλλά και της παραγωγικής και ερευνητικής διαδικασίας.

Η Εφαρμοσμένη Αριθμητική Ανάλυση στοχεύει στο να παρέχει εύχρηστα "εργαλεία" στο χρήστη καθοδηγώντας τον στην αξιολόγηση, επιλογή και χρήση τους αδιαφορώντας για την θεωρητική τεκμηρίωσή τους, πράγμα το οποίο αποτελεί αντικείμενο της θεωρητικής έρευνας και το οποίο διαπραγματεύονται πολυάριθμα κυκλοφορούντα συγγράμματα ελληνόγλωσσα και ξενόγλωσσα.

Για την εξυπηρέτηση αυτού του στόχου:

- Παρουσιάζονται οι πλέον εύχρηστες μέθοδοι Αριθμητικής Ανάλυσης.
- Γίνεται η παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών κάθε μεθόδου καθώς και των προϋποθέσεων εφαρμογής των, έτσι ώστε να μπορεί ο χρήστης να επιλέγει την κατάλληλη μέθοδο για το συγκεκριμένο πρόβλημα το οποίο καλείται να επιλύσει.
- Γίνεται παρουσίαση και ανάλυση των σφαλμάτων τα οποία προκαλούνται σε κάθε περίπτωση έτσι ώστε ο χρήστης να είναι σε θέση να ελέγχει την αποδοχή ή όχι της λύσης κάθε προβλήματος.
- Παρουσιάζονται πλήρη και ολοκληρωμένα παραδείγματα σε κάθε περίπτωση, τα οποία επιτρέπουν στον αναγνώστη να κατανοήσει απόλυτα τα γραφόμενα. Οι αναλυτική παρουσίαση της επίλυσης σε συνδυασμό με τα σχήματα και τους πίνακες, οι οποίοι τη συνοδεύουν, επιτρέπουν τη βήμα προς βήμα κατανόηση της περιγραφόμενης μεθόδου.
- Παρουσιάζονται αναλυτικά οι Αλγόριθμοι κάθε μεθόδου.
- Εκτίθενται έτοιμα προς χρήση προγράμματα σε QBASIC και TPASCAL για κάθε εκτιθέμενη μέθοδο.
- Δεδομένου ότι το λογισμικό της MICROSOFT υπάρχει σχεδόν σε κάθε μικροϋπολογιστή, γίνεται ευρεία παρουσίαση της χρήσης των δυνατοτήτων του EXCEL στην επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων, κάτι το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να χρησιμοποιεί τα μοντέλα χωρίς ν' απαιτείται από αυτόν η γνώση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού.

- Γίνεται συνοπτική παράθεση βασικών θεωρητικών μαθηματικών γνώσεων μόνο εκεί που κρίνεται σκόπιμο για την κατανόηση της συνέχειας του κειμένου από τον αναγνώστη.
  - Επιλεγμένες ασκήσεις, οι οποίες συνοδεύονται από απαντήσεις και υποδείξεις, επιτρέπουν στον αναγνώστη να εμπεδώνει και ν' αφομοιώνει τα γραφόμενα.
  - Η παράθεση βιβλιογραφικών αναφορών δεν γίνεται στην εξέλιξη του κειμένου για να μην αποσπάται η προσοχή του αναγνώστη, αλλά στο τέλος του βιβλίου.
- Για την καλύτερη αξιοποίηση του παρόντος βιβλίου θα πρέπει να τονιστούν τα ακόλουθα :
- Ο αναγνώστης θα πρέπει να γνωρίζει τα βασικά θεωρητικά μαθηματικά και τη βασική χρήση του Η/Υ.
  - Η ανάγνωση του παρόντος βιβλίου είναι άρρηκτα δεμένη με τη χρήση Η/Υ καθώς αυτό το βιβλίο αποτελεί "οδηγό χρήσης" και όχι θεωρητικό σύγγραμμα.
  - Η χρήση προγραμμάτων σε κάποια γλώσσα προγραμματισμού από το χρήστη, του επιτρέπει μεγαλύτερο έλεγχο σφάλματος απ' ότι η χρήση τυποποιημένων εργαλείων του Excel.
  - Τα προγράμματα σε QBasic και TPascal τα οποία παρατίθενται βασίζονται στη χρήση ρουτινών οι οποίες παρουσιάζονται αναλυτικά όταν αναφέρονται για πρώτη φορά στη ροή του κειμένου.

Η Εφαρμοσμένη Αριθμητική Ανάλυση στοχεύει στο να παρέχει εύχρηστα "εργαλεία" στο χρήστη καθοδηγώντας τον στην αξιολόγηση, επιλογή και χρήση τους αδιαφορώντας για την θεωρητική τεκμηριωσή τους.

Για την εξυπηρέτηση αυτού του στόχου :

- Παρουσιάζονται οι πλέον εύχρηστες μέθοδοι Αριθμητικής Ανάλυσης.
- Γίνεται η παρουσίαση των βασικών χαρακτηριστικών κάθε μεθόδου, έτσι ώστε να μπορεί ο χρήστης να επιλέγει την κατάλληλη μέθοδο για το συγκεκριμένο πρόβλημα, το οποίο καλείται να επιλύσει.
- Γίνεται παρουσίαση και ανάλυση των σφαλμάτων, τα οποία προκαλούνται σε κάθε περίπτωση, έτσι ώστε ο χρήστης να είναι σε θέση να ελέγχει την αποδοχή ή όχι της λύσης κάθε προβλήματος.
- Παρουσιάζονται πλήρη και ολοκληρωμένα παραδείγματα σε κάθε περίπτωση, τα οποία επιτρέπουν στον αναγνώστη να κατανοήσει απόλυτα τα γραφόμενα.
- Παρουσιάζονται αναλυτικά οι αλγόριθμοι κάθε μεθόδου.
- Εκτίθενται έτοιμα προς χρήση προγράμματα σε QBasic και TPascal για κάθε αναπτυσσόμενη μέθοδο.
- Γίνεται ευρεία παρουσίαση της χρήσης των δυνατοτήτων του Excel στην επίλυση των αριθμητικών προβλημάτων, κάτι το οποίο δίνει τη δυνατότητα στο χρήστη να χρησιμοποιεί τα μοντέλα, χωρίς ν' απαιτείται από αυτόν η γνώση κάποιας γλώσσας προγραμματισμού.
- Επιλεγμένες ασκήσεις, οι οποίες συνοδεύονται από απαντήσεις και υποδείξεις, επιτρέπουν στον αναγνώστη να εμπεδώνει και ν' αφομοιώνει τα γραφόμενα.

