

Διαμαντής Βορριάς

Θεόδωρος Γιαννόπουλος

Αθηνά-Μαρία Καταλειφού

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

I

510
BOP

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ

ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

Αρ. Εισ.

59833

Διαμαντής Βορριάς
Θόδωρος Γιαννόπουλος
Αθηνά - Μαρία Καταλειφού

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ I

Έργο Ενίσχυση και εμπλουτισμός
των Ακαδημαϊκών Βιβλιοθηκών
MIS 57755

Η συλλογή της Βιβλιοθήκης συγχρηματοδοτείται από την Ειρηνική Ένωση σε ποσοστό 75% και 25% από εθνικούς μας πόρους.



ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

Σχεδιασμός Εξωφύλλου

Gospel Creative

Εκτύπωση

Μ. Τσιαδής - Ν. Κουτσοδόντης

Βιβλιοδεσία

Αφοί Τσιαδή Ο.Ε.

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με τρόπο μηχανικό ή ηλεκτρονικό ή οποιονδήποτε άλλο, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν.2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης - Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν.100/1975. Επίσης απαγορεύεται η αναπαραγωγή της στοιχειοθεσίας, της σελιδοποίησης, του εξωφύλλου και γενικότερα της εμφάνισης του βιβλίου, με φωτοτυπικές, ηλεκτρονικές ή οποιεσδήποτε άλλες μεθόδους σύμφωνα με το άρθρο 51 του ν.2121/1993 χωρίς γραπτή άδεια του εκδότη.

© Copyright: Εκδόσεις Σταμούλη Α.Ε. • Αθήνα 2002

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΣΤΑΜΟΥΛΗ Α.Ε.

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΧΟΝΔΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΗ:

ΑΘΗΝΑ: ΑΒΕΡΩΦ 2 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ.: 0105238305 (6 γραμμές) FAX: 0105238959

ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ:

ΑΘΗΝΑ : ΑΒΕΡΩΦ 2 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ.: 0105238305 (6 γραμμές) FAX: 0105238959

ΠΕΙΡΑΙΑΣ : ΚΑΡΑΟΛΗ & ΔΗΜΗΤΡΙΟΥ 87 Τ.Κ. 185 34 ΤΗΛ.: 0104227504 FAX: 0104227577

E-mail: info@stamoulis.gr <http://www.stamoulis.gr>

.....
.....

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Τα Μαθηματικά είναι ο γλωσσικός πυρήνας της Επιστημονικής γνώσης. Η σύγχρονη Τεχνολογία χρησιμοποιεί μεθόδους και τεχνικές, οι οποίες εκτός της δικής τους συνηθισμένης πρακτικής, εμπεριέχει γνωσιολογικές διαστάσεις οι οποίες απαιτούν βαθύτερη γνώση των αρχών και διαδικασιών δόμησής τους.

Φυσικό είναι η άγνοια της βαθύτερης Επιστημονικής μεθοδολογίας να αφήνει ένα μεγάλο κενό, τόσο ως προς την κατανόηση των διαδικασιών της, όσο και ως προς τη δυνατότητα προώθησης και διεύρυνσης των επιδιωκόμενων εφαρμογών της. Η καλή γνώση των Μαθηματικών εννοιών, τόσο ως προς την ανάλυση όσο και ως προς τη σύνθεση, δίνουν τη δυνατότητα ισόρροπης θεμελίωσης του Τεχνολογικού οικοδομήματος σε σταθερή βάση, ανοίγοντας ταυτόχρονα τους ορίζοντες στις επεκτάσεις και εξειδικεύσεις των αντίστοιχων εφαρμογών.

Επιπλέον πρέπει να τονιστεί ότι μέσα από την πολλαπλότητα των μεθόδων και διαδικασιών που βρίσκουμε στα Μαθηματικά καθώς και από το εύρος των εφαρμογών τους στους διάφορους Τεχνολογικούς κλάδους, μπορούμε να ανακαλύψουμε και την ουσιαστική υποδομή της Τεχνολογικής ανάπτυξης.

Επίσης λόγω της αλματώδους ανάπτυξης της Τεχνολογίας των Ηλεκτρονικών Υπολογιστών, δίνεται ακόμη μεγαλύτερη ώθηση στις δυνατότητες υλοποίησης των πρακτικών εφαρμογών που προκύπτουν από τη μεθοδευμένη χρήση των Μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών.

Το παρών συγγραφικό έργο αποτελεί το πρώτο στη σειρά παρουσίασης του εκπαιδευτικού Μαθηματικού αντικειμένου, το οποίο σε συνδυασμό με το σύγγραμμα Μαθηματικά II που ακολουθεί, στοχεύουν στη δη-

μιουργία ισχυρής προπαρασκευαστικής βάσης για τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά που είναι και το τρίτο σύγγραμμα της σειράς αυτής. Ο βασικός σχεδιασμός της παρουσίασης και ο εκπαιδευτικός στόχος είναι η μαθησιακή διαδικασία ν' αναπτύσσεται μέσα από την επεξεργασία όσο γίνεται μεγαλύτερου αριθμού συνδεδεμένων μεταξύ τους εννοιών, την κατανόηση των μεθοδολογιών τους καθώς και των εφαρμογών τους στους διάφορους Τεχνολογικούς κλάδους..

Τα σημεία στήριξης της ύλης τοποθετήθηκαν στο Διαφορικό Λογισμό (συναρτήσεις μίας μεταβλητής), τη Γραμμική Άλγεβρα, τα στοιχεία Πιθανοτήτων και Στατιστικής καθώς η σύνδεση με τη Θεωρητική Πληροφορική προετοιμάζοντας το έδαφος για τη δυνατότητα χρήσης Μαθηματικού Λογισμικού που θα γίνει στα επόμενα συγγράμματα της σειράς αυτής.

Ευχόμαστε το συγγραφικό έργο αυτό ν' αποτελέσει ένα εύχρηστο εργαλείο για τον ενδιαφερόμενο αναγνώστη, ο οποίος έχει την ανάγκη του Μαθηματικού αντικειμένου στις σπουδές του καθώς και στην πρόοδο της μετέπειτα σταδιοδρομίας του.

Οι συγγραφείς

.....
.....

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

ΜΕΡΟΣ Α

Κεφάλαιο 1

ΑΡΧΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Αντιστοιχία..... | 19 |
| 1.2 | Αντίστροφη αντιστοιχία..... | 26 |
| 1.3 | Γεωμετρική ερμηνεία της αντιστοιχίας..... | 27 |
| 1.4 | Είδη απεικονίσεων..... | 30 |
| 1.5 | Συνάρτηση..... | 30 |
| 1.6 | Αντίστροφη συνάρτηση..... | 31 |
| 1.7 | Σύνθεση συναρτήσεων..... | 34 |
| 1.8 | Φραγμένη συνάρτηση..... | 38 |
| 1.9 | Μονοτονία συνάρτησης..... | 39 |
| 1.10 | Σύνθεση συναρτήσεων και μονοτονία..... | 43 |
| 1.11 | Αντίστροφη συνάρτηση και μονοτονία..... | 44 |

Κεφάλαιο 2

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

| | | |
|-----|---------------------------------|----|
| 2.1 | Συναρτήσεις που συγκλίνουν..... | 51 |
| 2.2 | Παραδείγματα..... | 54 |
| 2.3 | Συμπεράσματα..... | 61 |

| | | |
|------------|--|----|
| 2.4 | Γενικές ασκήσεις | 67 |
| 2.5 | Συνέχεια συναρτήσεων | 69 |
| 2.6 | Παραδείγματα | 85 |
| 2.7 | Ασυνέχεια και είδη ασυνέχειας συνάρτησης | 90 |
| 2.8 | Συμπεράσματα και ασκήσεις | 95 |

Κεφάλαιο 3

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ

| | | |
|-----------|--|-----|
| 1 | Ορισμός | 131 |
| 2 | Ιδιότητες των παραγώγων | 131 |
| 3 | Διαφορικό συνάρτησης | 132 |
| 4 | Γεωμετρική ερμηνεία παραγώγου - διαφορικού | 132 |
| 5 | Οι παράγωγοι των συναρτήσεων | 133 |
| 6 | Τύπος αναγωγής μιας εκθετικής συνάρτησης | 133 |
| 7 | Κανόνες του de l' Hospital | 133 |
| 8 | Πρόβλημα | 134 |
| 9 | Παρατήρηση I | 135 |
| 10 | Σημείωση I | 136 |
| 11 | Πρόβλημα I | 137 |
| 12 | Πρόβλημα II | 137 |
| 13 | Πρόβλημα III | 139 |
| 14 | Πρόβλημα IV | 139 |
| 15 | Πρόβλημα V | 140 |
| 16 | Ιδιότητα | 141 |
| 17 | Θεώρημα I (Fermat) | 142 |
| 18 | Θεώρημα II (Rolle) | 144 |
| 19 | Θεώρημα III (Μέση τιμή του διαφορικού λογισμού ή ή των πεπερασμένων αυξήσεων ή θ. του Lagrange) | 144 |
| 20 | Πόρισμα I | 145 |
| 21 | Πόρισμα II | 145 |
| 22 | Θεώρημα IV | 145 |
| 23 | Θεώρημα V | 146 |
| 24 | Εφαρμογή | 146 |
| 25 | Θεώρημα VI | 146 |
| 26 | Ασκήσεις παραγώγων | 146 |

Κεφάλαιο 4

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

| | | |
|------------|--|-----|
| 4.1 | Η χρήση των παραγώγων για τον υπολογισμό των οριακών τιμών συναρτήσεων (κανόνας de l' Hospital)..... | 159 |
| 4.2 | Ασύμπτωτοι (ευθείες) | 166 |
| 4.3 | Ασύμπτωτες – Συμπεράσματα..... | 178 |
| 4.4 | Μελέτη συνάρτησης | 183 |

Κεφάλαιο 5

ΑΟΡΙΣΤΟ & ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

| | | |
|------------|--|-----|
| 5.1 | Παράγουσα | 195 |
| 5.2 | Ιδιότητες – Βασικοί τύποι ολοκλήρωσης..... | 199 |
| 5.3 | Παραδείγματα επί των ιδιοτήτων | 200 |
| 5.4 | Γεωμετρική ερμηνεία της ολοκλήρωσης | 203 |
| 5.5 | Ανακεφαλαίωση | 209 |
| 5.6 | Μέθοδοι ολοκλήρωσης | 230 |
| 5.7 | Το ορισμένο ολοκλήρωμα | 307 |

Κεφάλαιο 6

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ

| | | |
|-------------|--|-----|
| 6.1 | Πίνακες..... | 333 |
| 6.2 | Ορίζουσες..... | 341 |
| 6.3 | Γραμμικά συστήματα..... | 348 |
| 6.4 | Ιδιοτιμές και ιδιοδιανύσματα | 359 |
| 6.5 | Λυμένες ασκήσεις (πίνακες) | 363 |
| 6.6 | Άλυτες ασκήσεις (πίνακες) | 368 |
| 6.7 | Λυμένες ασκήσεις (γραμμικά συστήματα) | 371 |
| 6.8 | Άλυτες ασκήσεις (γραμμικά συστήματα)..... | 375 |
| 6.9 | Λυμένες ασκήσεις (ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα)..... | 376 |
| 6.10 | Άλυτες ασκήσεις (ιδιοτιμές - ιδιοδιανύσματα) | 379 |

ΜΕΡΟΣ Β

| | |
|----------------|-----|
| Εισαγωγή | 383 |
|----------------|-----|

Κεφάλαιο 1**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**

- 1.1 Γενικότητες και ορισμοί..... 385
 1.2 Μεταθέσεις 386

Κεφάλαιο 2**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΠΟ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ
ΤΩΝ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**

- 2.1 Γενικότητες 399
 2.2 Δειγματικός χώρος 400
 2.3 Η πιθανότητα 402
 2.4 Πιθανότητα με συνθήκη..... 403
 2.5 Σύνθετες πιθανότητες 404
 2.6 Θεώρημα του Bayes..... 406
 2.7 Ασκήσεις - Παραδείγματα 408

Κεφάλαιο 3**ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**

- 3.1 Γενικότητες και ορισμοί..... 421
 3.2 Η διωνυμική κατανομή ή κατανομή Bernoulli..... 424
 3.3 Η διαδικασία και η κατανομή του Poisson 426
 3.4 Υπεργεωμετρική κατανομή..... 428

Κεφάλαιο 4**ΣΥΝΕΧΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΜΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ**

- 4.1 Γενικότητες 431
 4.2 Ιδιότητες της $f(x)$ 432
 4.3 Κανονική κατανομή..... 433
 4.4 Η εκθετική κατανομή..... 436
 4.5 Η γάμμα κατανομή..... 437

Κεφάλαιο 5

ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΕΣ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ

| | | |
|------------|---|-----|
| 5.1 | Γενικότητες | 441 |
| 5.2 | Μέση τιμή..... | 441 |
| 5.3 | Διασπορά ή διακύμανση..... | 443 |
| 5.4 | Διάμεσος, τεταρτοτόμοι, επικρατούσα τιμή..... | 445 |
| 5.5 | Χαρακτηριστικές των κατανομών..... | 446 |

Κεφάλαιο 6

ΔΕΙΓΜΑΤΟΛΟΓΙΕΣ - ΕΚΤΙΜΗΤΙΚΗ

| | | |
|------------|--|-----|
| 6.1 | Εισαγωγή..... | 449 |
| 6.2 | Γενικές έννοιες | 450 |
| 6.3 | Δειγματοληψία..... | 451 |
| 6.4 | Τρόπος δειγματοληψίας..... | 452 |
| 6.5 | Η έννοια της στατιστικής εκτίμησης | 454 |
| 6.5 | Εκτίμηση παραμέτρων | 457 |
| 6.7 | Διαστήματα εμπιστοσύνης..... | 457 |

Κεφάλαιο 7

ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΩΝ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ – ΚΑΝΟΝΕΣ ΑΠΟΦΑΣΗΣ

| | | |
|------------|--------------------------------------|-----|
| 7.1 | Στατιστικές υποθέσεις - Έλεγχος..... | 459 |
|------------|--------------------------------------|-----|

ΜΕΡΟΣ Γ

Κεφάλαιο 1

ΕΙΣΑΓΩΓΗ (από τη φιλοσοφία των μαθηματικών στην τεχνολογία των ηλεκτρονικών υπολογιστών)

| | | |
|------------|---|-----|
| 1.1 | Γενικά | 471 |
| 1.2 | Ο ρόλος της γλώσσας και η συστηματικοποίηση της γνώσης..... | 474 |

Κεφάλαιο 2

ΠΡΟΤΑΣΙΑΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

| | | |
|-----|--|-----|
| 2.1 | Προτασιακές μεταβλητές - Γενικά..... | 477 |
| 2.2 | Κανόνες σχηματισμού σύνθετων προτάσεων - Λογικές πράξεις.. | 478 |
| 2.3 | Κανόνες λογικής συμπεριφοράς των πράξεων - Πίνακες τιμών αλήθειας | 482 |
| 2.4 | Ταυτολογίες - Αντιφάσεις - Διαλογισμοί | 486 |
| 2.6 | Εφαρμογές | 490 |

Κεφάλαιο 3

ΚΑΤΗΓΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

| | | |
|-----|--|-----|
| 3.1 | Προτασιακοί τύποι - Η έννοια του κατηγορήματος | 495 |
| 3.2 | Ποσοδείκτες..... | 497 |
| 3.2 | Προτάσεις και μεταβλητοί προτασιακοί τύποι του κατηγορικού λογισμού | 499 |
| 3.4 | Ταυτολογία - Αντιφάσεις - Διαλογισμοί στον κατηγορικό λογισμό | 501 |
| 3.5 | Εφαρμογές | 503 |

Κεφάλαιο 4

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΥΝΟΛΟΘΕΩΡΙΑΣ

| | | |
|-----|--|-----|
| 4.1 | Οι βασικές έννοιες των συνόλων | 507 |
| 4.2 | Οι σχέσεις της ισότητας και της διάταξης μεταξύ συνόλων..... | 509 |
| 4.3 | Σύνολο αλήθειας προτασιακού τύπου..... | 510 |
| 4.4 | Πράξεις με σύνολα..... | 512 |
| 4.5 | Σύνολα αλήθειας σύνθετων προτασιακών τύπων | 516 |
| 4.6 | Σχέσεις - Σύνολα αλήθειας προτασιακών τύπων με δύο ή περισσότερες μεταβλητές..... | 519 |

Κεφάλαιο 5

ΑΛΓΕΒΡΕΣ BOOLE

| | | |
|-----|--|-----|
| 5.1 | Η έννοια της γενικευμένης άλγεβρας Boole | 525 |
| 5.2 | Η άλγεβρα Boole των προτασιακών κλάσεων | 527 |
| 5.3 | Η άλγεβρα Boole των συνόλων..... | 530 |

| | | |
|-----|-------------------------------|-----|
| 5.4 | Η δυαδική άλγεβρα Boole | 531 |
|-----|-------------------------------|-----|

Κεφάλαιο 6

ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

| | | |
|------|--|-----|
| 6.1 | Ψηφιακά σήματα | 535 |
| 6.2 | Κυκλώματα διακοπών – Η άλγεβρα των διακοπών..... | 536 |
| 6.3 | Λογικές πύλες – Λογικά κυκλώματα..... | 541 |
| 6.4 | Σύνθεση συνδυαστικών κυκλωμάτων μόνο με πύλες NAND ή NOR | 548 |
| 6.5 | Αθροιστές..... | 551 |
| 6.6 | Ελαχιστοποίηση του κόστους κατασκευής λογικών κυκλωμάτων ... | 554 |
| 6.7 | Πεπερασμένα αυτόματα | 556 |
| 6.8 | Σειριακά κυκλώματα..... | 558 |
| 6.9 | Η συμβολική λογική στον προγραμματισμό των Η/Υ..... | 561 |
| 6.10 | Σειριακά σήματα σε πεπερασμένα αυτόματα | 564 |
| 6.11 | Ελαχιστοποίηση των καταστάσεων της εσωτερικής σύνθεσης πεπερασμένων αυτόματων | 569 |
| 6.12 | Προγράμματα κατασκευής πινάκων αλήθειας και περιγραφής της λειτουργίας λογικών κυκλωμάτων | 577 |

| | |
|---------------------------|-----|
| ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ | 585 |
|---------------------------|-----|

Παράρτημα Α

| | |
|---------------------------------------|-----|
| ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ (τυπολόγιο)..... | 587 |
|---------------------------------------|-----|

Παράρτημα Β

| | |
|----------------------|-----|
| ΠΙΝΑΚΕΣ | 599 |
|----------------------|-----|

K.B.: 1704

ISBN SET: 960-351-386-5
ISBN VOL 1: 960-351-407-1