

$$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(x) = \int -\frac{1}{x^2} dx \Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} + C$$

ΧΡΗΣΤΟΣ Κ. ΦΡΑΓΚΟΣ

Μαθηματικός, M.Sc., Ph.D.

(Statistics, London School of Economics)

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow f(x) = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{y+x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{y+x}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{y+x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \sqrt{y+x}$$

$$\frac{6}{8} \sqrt{\frac{78.1}{352\pi}}$$

$$\frac{1}{x} = \sqrt{y+x}$$



ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$



**ΕΚΔΟΣΕΙΣ
ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ**

$$f_{xy} = \frac{1}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{1}{x^2 + y^2}$$

ΑΝΩΤΕΡΑ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Για τις Οικονομικές, Κοινωνικές και
Ιατρικές Επιστήμες

520
ΦΡΑ

ΣΥΛΛΟΓΗ

38194

ΧΡΗΣΤΟΣ Κ. ΦΡΑΓΚΟΣ

Μαθηματικός, M.Sc., Ph.D. (Statistics, London School of Economics)

Τ.Ε.Ι. ΑΘΗΝΑΣ
ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ

ΑΝΩΤΕΡΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

*Για τις Οικονομικές, Κοινωνικές και
Ιατρικές Επιστήμες*

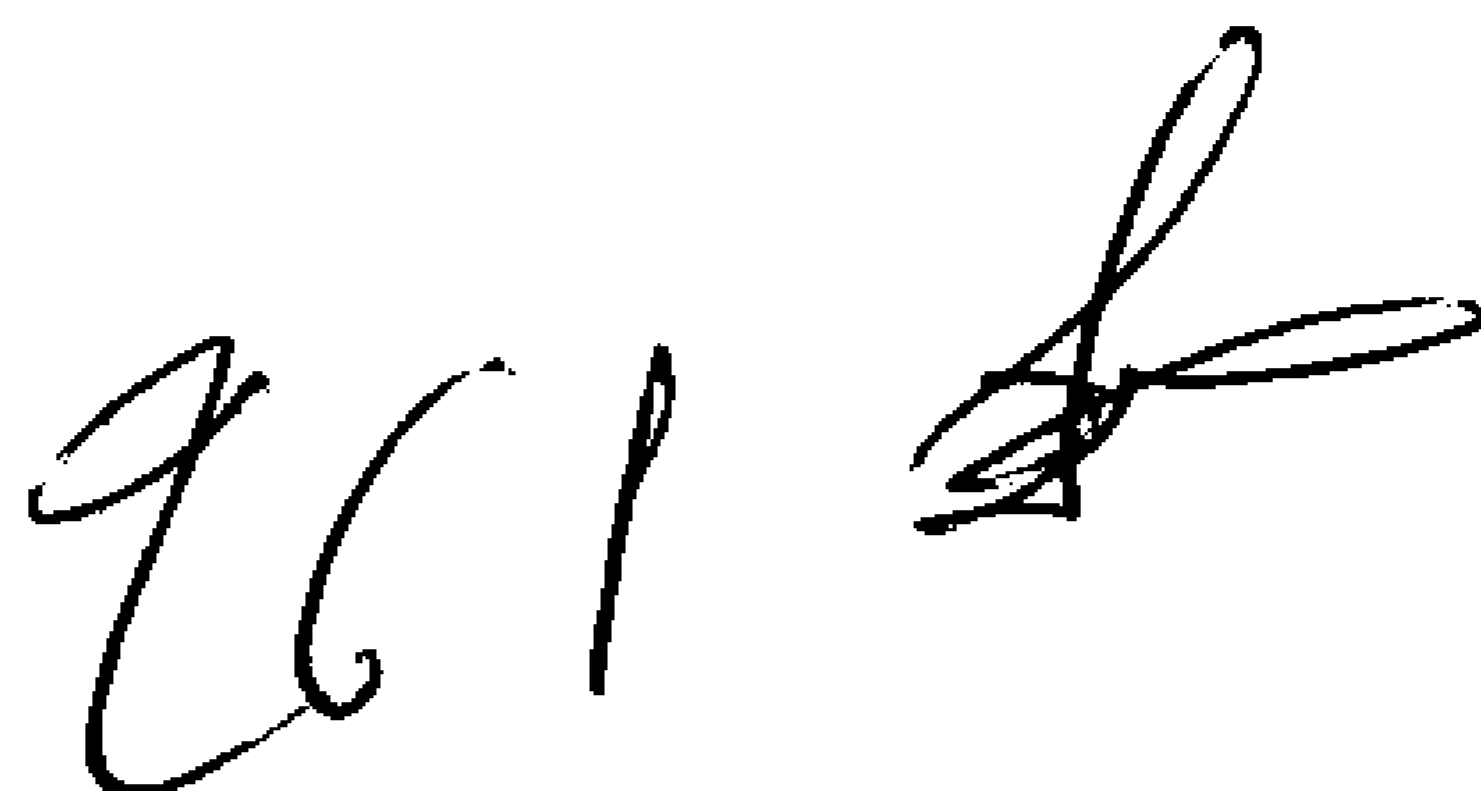


Ε Κ Δ Ο Σ Ε Ι Σ

ΑΘ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

203

Κάθε γνήσιο αντίτυπο φέρει την υπογραφή του συγγραφέα.



Στοιχειοθεσία - Σελιδοποίηση - Films - Μοντάζ
Κύτταρο - Ατελιέ γραφικών τεχνών
Σχεδιασμός Εξωφύλλου
Gospel Creative
Εκτύπωση
Μ. Τσιαδής - Ν. Κουτσοδόντης
Βιβλιοδεσία
Αφοι Τσιαδή Ο.Ε.

Απαγορεύεται η με οποιονδήποτε τρόπο ανατύπωση ή μετάφραση οποιουδήποτε μέρους του βιβλίου, χωρίς την έγγραφη άδεια του συγγραφέα και του εκδότη.

Copyright © ΑΘΗΝΑ 1999

ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΑΘΑΝ. ΣΤΑΜΟΥΛΗΣ

ΓΡΑΦΕΙΑ - ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΟ - ΧΟΝΔΡΙΚΗ ΠΩΛΗΣΗ:

ΑΘΗΝΑ: ΑΒΕΡΩΦ 2 Τ.Κ. 104 33 ΤΗΛ: 5238305 (4 γραμμές) FAX: 5238959 E-mail: info@stamoulis.gr

<http://www.stamoulis.gr>

Ο κόσμος της Οικονομίας και του Εμπορίου είναι μια ομιχλώδης περιοχή. Οι πρώτοι εξερευνητές χρησιμοποίησαν τη διαίσθησή τους χωρίς καμία βοήθεια. Τα Μαθηματικά είναι το φανάρι με το οποίο τα πράγματα που, προηγούμενα, φαίνονταν αμυδρά, τώρα προβάλλουν με επιβλητικές σιλουέτες. Με τα Μαθηματικά βλέπουμε καλύτερα και, επίσης, μακρύτερα.

Irving Fisher (1892)

Το βιβλίο αυτό αφιερώνεται στο φίλο μου Παναγιώτη Ρουμπή και στους δασκάλους και επιστημονικούς συμβούλους μου Καθηγητές M. Knott, W. Schucany, M. Stone and J. Wu.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ

| | |
|-------------------|-------------------------------------------------------|
| \mathbb{N} | : το σύνολο $\{0,1,2,3, \dots\}$ των φυσικών αριθμών. |
| \mathbb{N}^* | : το σύνολο $\{1,2,3, \dots\}$. |
| \mathbb{Z} | : το σύνολο των ακεραίων αριθμών. |
| \mathbb{Q} | : το σύνολο των ρητών αριθμών. |
| \mathbb{R} | : το σύνολο των πραγματικών αριθμών. |
| \mathbb{C} | : το σύνολο των μιγαδικών αριθμών. |
| \in | : ανήκει. |
| \notin | : δεν ανήκει. |
| \wedge | : και (σύζευξη). |
| \forall | : για κάθε. |
| \exists | : υπάρχει (τουλάχιστον ένα). |
| : | : τέτοιο ώστε. |
| \Rightarrow | : συνεπάγεται. |
| \Leftrightarrow | : ισοδυναμεί. |
| \emptyset | : το κενό σύνολο. |
| $y=f(x)$ | : συνάρτηση μιας μεταβλητής του x . |
| Y | : εξαρτημένη μεταβλητή, x : ανεξάρτητη μεταβλητή. |
| $x=f^{-1}(y)$ | : η αντίστροφη συνάρτηση της $y=f(x)$. |

ΠΙΝΑΚΑΣ ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΩΝ

| | |
|------------------------------------|----|
| Λίγα Λόγια για τον Συγγραφέα | 22 |
| ΠΡΟΛΟΓΟΣ | 23 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

| | |
|---------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1.1 Συστήματα Γραμμικών Εξισώσεων, Μέρος Α. | 25 |
| 1.2 Μέθοδος των Αντιθέτων Συντελεστών για τη λύση Ενός Συστήματος Εξισώσεων | 29 |
| 1.3 Μοντέλα Συστημάτων Εισόδου- Εξόδου Input- Output Models (Leontief Models)..... | 30 |
| 1.4 Γενική Θεωρία Των Συστημάτων Εισόδου-Εξόδου του Leontief..... | 32 |
| 1.5 Εισαγωγή στα Διανύσματα Δυο και Τριών Διαστάσεων..... | 35 |
| 1.6 Γεωμετρική Παράσταση Διανυσμάτων..... | 36 |
| 1.7 Σύστημα Συντεταγμένων Ενός Διανύσματος | 40 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 1</i> | 49 |
| 1.8 Πράξεις Μεταξύ Διανυσμάτων και Νόρμα Διανύσματος | 52 |
| 1.9 Εσωτερικό Γινόμενο Δύο Διανυσμάτων. | 56 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 2</i> | 65 |
| 1.10 Διανύσματα Στον Χώρο n Διαστάσεων. | 67 |
| 1.11 Διανυσματική Μορφή Ευθειών και Επιπέδων στον Χώρο \mathbb{R}^n | 69 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΜΕΤΑΞΥ
ΠΙΝΑΚΩΝ

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 2.1 Ορισμοί..... | 77 |
| 2.2 Άθροισμα και Πολλαπλασιασμός Πινάκων επί Πραγματικού Αριθμού. | 81 |
| 2.3 Πολλαπλασιασμός Πινάκων..... | 83 |
| 2.4 Παράσταση Συστημάτων Γραμμικών Εξισώσεων με την Βοήθεια Πινάκων. | 87 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 3</i> | 89 |
| 2.5 Κανόνες Πολλαπλασιασμού Πινάκων. | 91 |
| 2.6 Δυνάμεις Πινάκων | 92 |
| 2.7 Είδη Πινάκων και Ιδιότητές τους. | 94 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 4</i> | 98 |
| 2.8 Οριζουσες..... | 100 |
| 2.9 Κανόνας του Sarrus για τον Υπολογισμό μιας Οριζουσας Τάξης 3..... | 109 |
| 2.9 Βασικές Ιδιότητες των Οριζουσών. | 110 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 5</i> | 113 |
| 2.10 Ο Αντίστροφος Ενός Πίνακα..... | 117 |
| 2.11 Ιδιότητες Αντιστρόφου Πίνακα | 121 |
| 2.12 Λύση Συστημάτων με Αντίστροφο Πίνακα..... | 122 |
| 2.13 Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα | 123 |
| 2.14 Εύρεση Αντιστρόφου Πίνακα Με τη Βοήθεια Στοιχειωδών Πράξεων Γραμμών | 127 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 6</i> | 131 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3**ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ
ΜΕΡΟΣ Β΄**

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1 Λύση Συστήματος ή Εξισώσεων με n Αγνώστους με τον Κανόνα του Cramer | 135 |
| 3.2 Διερεύνηση Συστήματος 3 Εξισώσεων με 3 Αγνώστους..... | 136 |
| 3.3 Λύση Ομογενών Συστημάτων (n) Εξισώσεων με (n)Αγνώστους..... | 138 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 7</i> | 140 |
| 3.4 Λύση Γραμμικών Συστημάτων Προσφοράς και Ζήτησης (supply and demand analysis) | 140 |
| 3.5 Λύση Γραμμικών Συστημάτων Ισότητας Κόστους Παραγωγής Προϊόντος και Εισοδήματος από Πωλήσεις (break - even analysis) | 143 |
| 3.4. Λύση Γραμμικού Συστήματος με την Μέθοδο Απαλειφής του GAUSS - JORDAN | 145 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 8</i> | 148 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4**ΕΙΔΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΗΣ
ΑΛΓΕΒΡΑΣ**

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 4.1 Γραμμική Ανεξαρτησία Διανυσμάτων | 151 |
| 4.2 Εφαρμογή της Γραμμικής Εξάρτησης Διανυσμάτων στη Λύση Γραμμικών Συστημάτων..... | 156 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 9</i> | 158 |
| 4.3 Τάξη Ενός Πίνακα | 158 |
| 4.4 Εύρεση της Τάξης Ενός Πίνακα και Διερεύνηση Γραμμικών Συστημάτων | 161 |
| 4.5 Ιδιότητες και Ιδιοδιανύσματα (Eigenvalues and Eigenvectors) | 164 |
| 4.6 Υπολογισμός Ιδιοτιμών και Ιδιοδιανυσμάτων | 166 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 10</i> | 171 |
| 4.7 Διαγωνιοποίηση ενός Πίνακα..... | 172 |
| 4.8 Θεμελιώδη Θεωρήματα που Αφορούν τις Ιδιοτιμές Συμμετρικών Πινάκων..... | 174 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

| | |
|---------------------------------------------|-----|
| 5.1 Το Σύστημα των Πραγματικών Αριθμών..... | 175 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 11</i> | 179 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 12</i> | 182 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θ Ε Ω Ρ Ι Α Σ Υ Ν Ο Λ Ω Ν

| | |
|---------------------------------|-----|
| 6.1. Εισαγωγή..... | 183 |
| 6.2 Πράξεις Μεταξύ Συνόλων..... | 186 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 13</i> | 190 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΜΙΑΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΗΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΣΤΗΝ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΗ ΕΠΙΣΤΗΜΗ

| | |
|----------------------------------------------------------|-----|
| 7.1 Ορισμός Συνάρτησης Μίας Πραγματικής Μεταβλητής | 193 |
| 7.2 Αντίστροφος Συνάρτησης | 196 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 14</i> | 198 |
| 7.3 Γραφικές Παραστάσεις Εξισώσεων Δύο Μεταβλητών. | 200 |

| | |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 15</i> | 211 |
| 7.4 Πολυωνυμικές, Εκθετικές και Κλασματικές Συναρτήσεις. | 212 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 16</i> | 221 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

| | |
|---------------------------------------------------------------|-----|
| 8.1 Εισαγωγή..... | 225 |
| 8.2 Μερικά Θεωρήματα Σχετικά με την Έννοια του Ορίου. | 232 |
| 8.3 Συνέχεια Συνάρτησης | 235 |
| 8.3.1 Αποτελέσματα που ισχύουν για συνεχείς συναρτήσεις. | 240 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 17</i> | 241 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

| | |
|-------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1 Εισαγωγή..... | 245 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 18</i> | 253 |
| 9.2 Διαφορισιμότητα και Συνέχεια Συνάρτησης..... | 255 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 19</i> | 257 |
| 9.3 Ρυθμός Μεταβολής Συνάρτησης..... | 257 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 20</i> | 262 |
| 9.4 Κανόνες Εύρεσης Παραγώγου..... | 264 |
| 9.5 Εύρεση Παραγώγου Αθροίσματος Γινομένου Και Πηλίκου Συναρτήσεων | 267 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 21</i> | 272 |
| 9.6 Προβλήματα Ρυθμού Μεταβολής Συνάρτησης (rate of change problems) | 275 |

| | |
|-------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.7 Παράγωγος Σύνθετου Συνάρτησης (the chain rule)..... | 277 |
| 9.8 Ο Γενικευμένος Νόμος Δύναμης Συνάρτησης | 280 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 22</i> | 281 |
| 9.9 Παράγωγοι Δεύτερης και Ανώτερης Τάξης Μιας Συνάρτησης..... | 284 |
| 9.10 Παράγωγος Πλεγμένων συναρτήσεων | 285 |
| 9.11 Γωνία Μεταξύ Δύο Πεπλεγμένων Συναρτήσεων | 288 |
| 9.12 Παράγωγος Αντιστρόφου Συνάρτησης..... | 289 |
| 9.13 Ελαστικότητα Ζήτησης (elasticity of demand) | 290 |
| 9.14 Διαφορικό Συνάρτησης | 293 |
| 9.15 Γραμμικές Προσεγγίσεις Συνάρτησης | 294 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 23</i> | 298 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

ΜΕΡΙΚΑ ΧΡΗΣΙΜΑ ΘΕΩΡΗΜΑΤΑ ΓΙΑ ΤΗΝ ΠΑΡΑΓΩΓΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.1 Θεωρήματα Bolzano και Ενδιαμέσου Τιμής | 301 |
| 10.2 Θεωρήματα Ακρότατης και Μέσης Τιμής για μια Συνάρτηση | 304 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 24</i> | 310 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

ΒΕΛΤΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΜΙΑΣ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1 Εισαγωγή..... | 311 |
| 11.2 Κριτήριο Πρώτης Παραγώγου για την Εύρεση Ακρότατων Σημείων | 315 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 25</i> | 320 |
| 11.3 Τοπικά Ακρότατα Συνάρτησης | 322 |
| 11.4 Κοίλες και Κυρτές Συναρτήσεις Κριτήριο 2 ^{ης} Παραγώγου για Τοπικά Ακρότατα | 324 |
| 11.5 Οι έννοιες της κατακόρυφης και Οριζόντιας Ασύμπτωτης μιας Συνάρτησης | 333 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 26</i> | 337 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 12

Η ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

| | |
|--------------------------------------------------------------|-----|
| 12.1 Εισαγωγή..... | 339 |
| 12.2 Ο αριθμός e | 343 |
| 12.3 Ανατοκισμός | 343 |
| 12.4 Παραγώγιση Συναρτήσεων Της Μορφής $y=e^{g(x)}$ | 345 |
| 12.5 Ορισμός και Ιδιότητες της Λογαριθμικής Συνάρτησης | 346 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 27</i> | 350 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 13

Ο Λ Ο Κ Λ Η Ρ Ω Σ Η Σ Υ Ν Α Ρ Τ Η Σ Ε Ω Ν

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 13.1 Εισαγωγή - Αόριστο Ολοκλήρωμα..... | 355 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 28</i> | 365 |
| 13.2 Το Ορισμένο Ολοκλήρωμα | 367 |
| 13.3 Ολοκλήρωση με Αντικατάσταση..... | 370 |
| 13.4 Ολοκλήρωση Κατά Μέρη | 374 |
| 13.5 Υπολογισμός της Επιφάνειας με Χρήση του Ολοκληρώματος | 378 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 13.6 Οικονομικές Εφαρμογές της Ολοκλήρωσης | 385 |
| 13.6.1 Υπολογισμός των μεγεθών: Πλεόνασμα παραγωγού και Πλεόνασμα καταναλωτού | 387 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 29 | 392 |
| 13.7 Πρόσθετες Οικονομικές Εφαρμογές της Ολοκλήρωσης. | 397 |
| 13.7.1 Συνεχής Ροή Εισοδήματος | 397 |
| 13.7.2 Περιθωριακή Ανάλυση | 397 |
| 13.7.3 Κατανομή Εισοδήματος, Καμπύλη Lorenz και Συντελεστής Gini | 398 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 14

ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΟΛΛΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 14.1 Εισαγωγή..... | 413 |
| 14.2 Γραφικές Παραστάσεις Συναρτήσεων με Δύο Μεταβλητές..... | 415 |
| 14.3 Μερικές Παράγωγοι μιας Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών..... | 419 |
| Μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης μιας συνάρτησης. | 424 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 30 | 426 |
| 14.4 Μέγιστα και Ελάχιστα Σημεία μιας Συνάρτησης Δύο Μεταβλητών | 427 |
| 14.5 Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange για τη Βελτίωση μιας Συνάρτησης | 435 |
| Μέθοδος Πολλαπλασιαστών Lagrange. | 436 |
| 14.6 Μέθοδος Ελαχίστων Τετραγώνων | 440 |
| ΑΣΚΗΣΕΙΣ 31 | 445 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 15**ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
(differential equations)**

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 15.1 Εισαγωγή..... | 449 |
| 15.2 Διαφορικές Εξισώσεις με Χωριζόμενες Μεταβλητές (separable differential equations)..... | 453 |
| 15.3 Γραμμικές Διαφορικές Εξισώσεις 1 ^{ης} Τάξης | 459 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 32</i> | 464 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16**ΑΚΟΛΟΥΘΙΕΣ ΚΑΙ ΣΕΙΡΕΣ**

| | |
|-----------------------------------------------|-----|
| 16.1 Εισαγωγή..... | 467 |
| 16.2 Γεωμετρικές Ακολουθίες..... | 468 |
| 16.3 Πολυώνυμα Taylor | 472 |
| 16.4 Σειρά Απείρων Όρων..... | 474 |
| <i>Η γεωμετρική σειρά απείρων όρων.</i> | 475 |
| 16.5 Σειρά Taylor..... | 477 |
| 16.6 Νόμος του L' HOSPITAL..... | 478 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 33</i> | 481 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 17**ΓΡΑΜΜΙΚΟΣ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ**

| | |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 17.1 Εισαγωγή-ορισμοί..... | 485 |
| 17.2 Γεωμετρική Προσέγγιση Λύσης Απλών Προβλημάτων LP | 486 |
| 17.3 Η Μέθοδος Simplex Λύσης Προβλημάτων Γραμμικού Προγραμματισμού | 491 |

| | |
|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 17.4 Λύση Προβλήματος Γραμμικού Προγραμματισμού με τη Μέθοδο SIMPLEX | 493 |
| 17.5 Το Δυαδικό Πρόβλημα του Γραμμικού Προγραμματισμού..... | 498 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 34</i> | 500 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 18

ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ

| | |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| 18.1 Ορισμοί..... | 503 |
| 18.2 Λύση του Προβλήματος του Ιστού της Αράχνης (Cobweb Problem) | 507 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 35</i> | 514 |

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 19

ΣΥΝΔΥΑΣΜΟΙ - ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ ΔΙΩΝΥΜΙΚΟ ΘΕΩΡΗΜΑ (Combinations, Permutations, Binomial Theorem)

| | |
|---------------------------------------------------------------------|-----|
| 19.1. Θεμελιώδης Αρχή Του Γινομένου (multiplication principle)..... | 515 |
| 19.1.1. Θεμελιώδης αρχή γινομένου (multiplication principle) | 517 |
| 19.2. Μεταθέσεις (permutations)..... | 517 |
| 19.3. Συνδυασμοί (combinations) | 520 |
| 19.4. Το Διωνυμικό Θεώρημα (binomial theorem)..... | 526 |
| <i>ΑΣΚΗΣΕΙΣ 36</i> | 529 |

Π Ι Ν Α Κ Α Σ Ο Λ Ο Κ Λ Η Ρ Ω Μ Α Τ Ω Ν

| | |
|----------------------------------------------------------------------|-----|
| <i>ΒΑΣΙΚΟΙ ΤΥΠΟΙ</i> | 535 |
| <i>ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΑΛΓΕΒΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</i> | 535 |
| <i>ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</i> | 541 |
| <i>ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</i> | 545 |
| <i>ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</i> | 546 |

Β Ι Β Λ Ι Ο Γ Ρ Α Φ Ι Α

| | |
|----------------------------|-----|
| <i>α. ΞΕΝΟΓΛΩΣΣΗ</i> | 549 |
| <i>β. ΕΛΛΗΝΙΚΗ</i> | 550 |

Λίγα λόγια για το συγγραφέα...

Ο Χρήστος Κων/νου Φράγκος γεννήθηκε στα Γιάννενα το 1949.

Κατέχει Πτυχίο του Μαθηματικού Τμήματος της Σχολής Θετικών Επιστημών του Πανεπιστημίου Αθηνών, Master of Science in Statistics από το Πανεπιστήμιο Brunel της Αγγλίας και Doctor of Philosophy in Statistics από το London School of Economics and Political Sciences (1980). Έκανε μεταδιδακτορικές σπουδές στο University College, London, και Imperial College, London.

Δίδαξε θεωρία Πιθανοτήτων και Στατιστικής στο Πανεπιστήμιο Κρήτης (1981-1983), στο Πανεπιστήμιο Witwatersrand του Γιοχαννεσμπουργκ, Νότια Αφρική (1984-1986, 1988-1995), και στο Τμήμα Στατιστικής του Southern Methodist University, Dallas, Texas (1987). Έχει δημοσιεύσει πολλές επιστημονικές εργασίες σε ξένα επιστημονικά περιοδικά (Biometrika κ.α.). Ειδικεύεται σε θέματα μη παραμετρικών μεθόδων Στατιστικής (Robust Estimation, Bootstrap Methods). Έχει κάνει επιστημονικές ανακοινώσεις σε περισσότερα από 50 Διεθνή Συνέδρια.

A few words about the Author...

Chris C. Frangos was born in Greece (Ioannina) in 1949.

He has a B.Sc. in Mathematics (University of Athens), a M.Sc. in Statistics (University of Brunel) and a Ph.D. in Statistics (London School of Economics and Political Sciences, 1980). He has carried out post-doctoral studies at University College, London and Imperial College, London.

He has taught Probability and Statistics at the University of Crete (1981-1983), at the University of Witwatersrand, Johannesburg, South Africa (1984-1986, 1988-1995), and at the Southern Methodist University, Dallas, Texas (1987). He has published numerous scientific papers in foreign journals (Biometrika, etc.) and he has read papers at many International Conferences. His research interests include the areas of Nonparametric Statistics (Robust Estimation, Bootstrap Methods of Estimation, etc.).

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Ο σκοπός του βιβλίου αυτού είναι να δώσει στους φοιτητές των Οικονομικών, Κοινωνικών και Ιατρικών επιστημών των Πανεπιστημίων και στους σπουδαστές των Τεχνολογικών Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων, μια περιεκτική επισκόπηση των βασικών Συνόλων της Άλγεβρας, του Διανυσματικού Λογισμού και της Μαθηματικής Ανάλυσης.

Είναι αναμφισβήτητο γεγονός ότι τα εργαλεία των Μαθηματικών ιδιαίτερα ο Διαφορικός Λογισμός μιας και πολλών μεταβλητών και η βελτιστοποίηση Συναρτήσεων με ή χωρίς περιορισμούς, είναι πολύ χρήσιμα στους σπουδαστές της Οικονομικής Επιστήμης.

Η θεωρία των Πινάκων χρησιμοποιείται στην Οικονομετρία και η θεωρία των Γραμμικών Συστημάτων χρησιμοποιείται στα προβλήματα «input-output» όπως αυτά παρουσιάζονται στη θεωρία Leontief. Βέβαια, αυτό δεν σημαίνει ότι τα Μαθηματικά μπορούν να ερμηνεύσουν τις Οικονομικές Σχέσεις. Μπορούμε να πούμε, τελικά, ότι τα μαθηματικά βοηθούν στην ακριβή διατύπωση και λύση των οικονομικών προβλημάτων παρά στην καθ' αυτό ερμηνεία των οικονομικών μεγεθών.

Τα κεφάλαια του βιβλίου αυτού είναι:

- Κεφάλαιο 1^ο Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
- Κεφάλαιο 2^ο Πίνακας και Πράξεις μεταξύ Πινάκων
- Κεφάλαιο 3^ο Συστήματα Γραμμικών εξισώσεων, μέρος Β'
- Κεφάλαιο 4^ο Ειδικά Θέματα Γραμμικής Άλγεβρας
- Κεφάλαιο 5^ο Πραγματικοί Αριθμοί
- Κεφάλαιο 6^ο Θεωρία Συνόλων
- Κεφάλαιο 7^ο Εισαγωγή στις Συναρτήσεις μιας Πραγματικής Μεταβλητής Εφαρμογής στην Οικονομική Επιστήμη
- Κεφάλαιο 8^ο Όρια και Συνέχεια Συναρτήσεων
- Κεφάλαιο 9^ο Παράγωγος Συνάρτησης μιας Μεταβλητής

- Κεφάλαιο 10^ο Μερικά Χρήσιμα Θεωρήματα για την παράγωγο
συνάρτησης μιας Μεταβλητής
- Κεφάλαιο 11^ο Βελτιστοποίηση Συνάρτησης μιας Μεταβλητής
- Κεφάλαιο 12^ο Η Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση
- Κεφάλαιο 13^ο Ολοκλήρωση Συναρτήσεων
- Κεφάλαιο 14^ο Συναρτήσεις Πολλών Μεταβλητών
- Κεφάλαιο 15^ο Διαφορικές Εξισώσεις
- Κεφάλαιο 16^ο Ακολουθίες και Σειρές
- Κεφάλαιο 17^ο Γραμμικός Προγραμματισμός
- Κεφάλαιο 18^ο Εξισώσεις Διαφορών
- Κεφάλαιο 19^ο Συνδυασμοί, Μεταθέσεις, Διωνυμικό Θεώρημα

Τα χαρακτηριστικά του βιβλίου είναι η απλότητα και η πληθώρα των παραδειγμάτων με τα οποία εμπεδώνεται το θεωρητικό μέρος.

Αισθάνομαι την υποχρέωση να ευχαριστήσω τον Εκδοτικό Οίκο Σταμούλη και το Ατελιέ Γραφικών Τεχνών «Κύτταρο» για την φροντισμένη έκδοση του βιβλίου αυτού.

Στη γυναίκα μου και στα παιδιά μου εκφράζω ευχαριστίες για την κατανόηση και την υπομονή τους κατά την περίοδο συγγραφής του βιβλίου.

Πιστεύω ότι το βιβλίο θα γίνει ένα καλό βοήθημα για τους Φοιτητές των Ανωτάτων Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων και των Τεχνολογικών Εκπαιδευτικών Ιδρυμάτων της χώρας μας.

Αθήνα, 15-2-1999

Ο συγγραφέας

Χρίστος Κων/νου Φράγκος

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \sqrt{\frac{1}{x^2 + y^2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{df}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x} dx \Rightarrow f$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y+x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{y+x}} \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y+x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{y+x}}$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\sqrt{y+x}} \right) = \frac{1}{\sqrt{y+x}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) = \int \frac{1}{x} dx$$

$$\int \frac{1}{\cos x} dx = - \int \frac{1}{y} dy = -\ln y$$